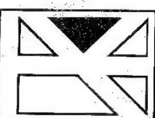
La procedencia de los materiales que forman el presente volumen explica algunas anomalías de su estructura y contenido: ELEMENTOS DE HISTORIA DE LAS MATEMATICAS reúne, sin modificaciones sustanciales, la gran mayoría de las notas de ese carácter que acompañan a los tomos ya publicados de la célebre obra firmada con el nombre de NICOLAS BOURBAKI, pseudónimo colectivo de un grupo de matemáticos franceses contemporáneos. En consecuencia, la historia de los temas pendientes aún de elucidación teórica forma una laguna que sólo podrá ser cubierta a medida que progrese el ambicioso proyecto; así, el lector encontrará por el momento tan sólo alusiones a determinadas partes de las matemáticas clásicas —la Geometría diferencial, la Geometría algebraica y el Cálculo de variaciones— y desarrollos incompletos de temas tales como las funciones analíticas y las ecuaciones diferenciales o con derivadas parciales. Sin embargo, el tratamiento de las cuestiones tenidas en cuenta —teoría de conjuntos, teoría de números, análisis combinatorio, álgebra lineal y multilineal, conmutativa y no conmutativa, divisibilidad, espacios topológicos, uniformes, métricos, funcionales y vectoriales, exponenciales y logaritmos, cálculo infinitesimal, integración, etc.— es un modelo de rigor y claridad y constituye la mejor garantía de que, a medida que vayan siendo incorporadas en el futuro las ampliaciones pendientes, se podrá disponer de una historia de las matemáticas que, prescindiendo de informaciones biográficas o anecdóticas, trace satisfactoriamente la génesis, desarrollo e interrelaciones de las teorías que integran la disciplina. En esa línea de renovación y ampliación, esta segunda edición castellana incluye las novedades incorporadas a la edición francesa de 1974: tres nuevos capítulos sobre integración en los espacios no localmente compactos, grupos y álgebras de Lie y grupos engendrados por reflexiones, así como numerosas adiciones a la bibliografía y algunas modificaciones importantes del texto anterior.



Alianza Editorial

Alianza Editorial

Nicolás Bourbaki Elementos de historia de las matemáticas

AU 18

Nicolas Bourbaki
Elementos de historia de las matemáticas

Alianza Universidad

Elementos de historia de las matemáticas

Alianza Universidad

Nicolas
Bourbaki

Elementos de historia de las matemáticas

Nueva edición revisada y aumentada

Versión española de
Jesús Hernández

Alianza
Editorial

Título original:
Eléments d'histoire des mathématiques

La edición original de «Elementos de historia de las matemáticas» ha sido publicada en Francia bajo el título «Eléments d'histoire des mathématiques» por HERMANN, Editeurs des Sciences et des Arts, París.

Primera edición en «Alianza Universidad», 1972
Segunda edición corregida y aumentada en «Alianza Universidad», 1976

Calle Milán, 38; ☎ 200 00 45
ISBN: 84-206-2018-1
Depósito legal: M. 9.367-1976
Impreso en Closas-Orcoyen, S. L. Martínez Paje, 5. Madrid-29
Printed in Spain

INDICE

ADVERTENCIA

Esta obra reune, sin modificación sustancial, la mayor parte de las Notas históricas aparecidas hasta ahora en mis *Eléments de Mathématique* (Elementos de Matemáticas). Nos hemos limitado a hacer su lectura independiente de los capítulos de los *Eléments* a continuación de los cuales están situadas, por tanto son en principio accesibles a todo lector provisto de una sólida cultura matemática clásica.

Desde luego, los estudios separados que forman este volumen no pretenden trazar en modo alguno, ni siquiera en forma sumaria, una historia completa y continuada del desarrollo de las Matemáticas hasta nuestros días. Solamente se hace alguna alusión a partes enteras de las matemáticas clásicas, como la Geometría diferencial, la Geometría algebraica y el Cálculo de variaciones; otras, como la teoría de números, la teoría de las funciones analíticas, y las de las ecuaciones diferenciales o en derivadas parciales, apenas aparecen; y, naturalmente, estas lagunas se hacen más numerosas e importantes al llegar a la época moderna. No es necesario decir que no se trata de omisiones intencionadas, se deben simplemente al hecho de que

los capítulos correspondientes de los *Eléments* no se han publicado todavía.

Finalmente, el lector no encontrará prácticamente en estas notas ninguna referencia biográfica o anecdótica sobre los matemáticos que aparecen; se ha intentado fundamentalmente, para cada teoría, poner de manifiesto, con la mayor claridad posible, cuáles han sido sus ideas directrices, y la forma en que estas ideas se han desarrollado y han actuado unas sobre otras.

Los números en caracteres itálicos remiten a la Bibliografía situada al final del libro.

FUNDAMENTOS DE LAS MATEMATICAS. LOGICA. TEORIA DE CONJUNTOS

El estudio de lo que suele llamarse los «fundamentos de las Matemáticas», que ha venido realizándose ininterrumpidamente desde el principio del siglo XIX, no ha podido llevarse a cabo más que mediante un esfuerzo paralelo de sistematización de la Lógica, al menos en aquellas de sus partes que rigen el encadenamiento de las proposiciones matemáticas. Tampoco puede separarse la historia de la Teoría de conjuntos y de la formalización en matemáticas de la de la «Lógica matemática». Pero la lógica tradicional, como la de los filósofos modernos, posee en principio un campo de aplicaciones mucho más amplio que las Matemáticas. El lector no deberá pues esperar encontrar en lo que sigue una historia de la Lógica, ni siquiera en forma muy sumaria; nos hemos limitado, en tanto que ello nos ha sido posible, a no seguir la evolución de la Lógica sino en la medida en que ha influido en la de las Matemáticas. No diremos nada por tanto de las lógicas no clásicas (lógicas con más de dos valores, lógicas modales), y, con mucha más razón, no abordaremos la reseña de las controversias que, desde los sofistas hasta el Círculo de Viena, no han dejado de dividir a los filósofos en lo referente a la posibilidad y a la forma de aplicar la Lógica a los objetos del mundo sensible o a los conceptos del espíritu humano.

Que existiese una matemática prehelénica muy desarrollada es

algo que hoy día no puede ser puesto en duda. No solamente las nociones (ya de por sí muy abstractas) de número entero y de medida de magnitudes son utilizadas corrientemente en los documentos más antiguos que nos han llegado de Egipto o de Caldea, sino que el álgebra babilónica, por la elegancia y seguridad de sus métodos, no podría ser considerada como una simple colección de problemas resueltos mediante una serie de tanteos empíricos. Y, si bien no se encuentra en los textos nada parecido a una «demostración» en el sentido formal de la palabra, hay motivo para pensar que el descubrimiento de tales procedimientos de resolución, cuya generalidad se transparenta a través de los casos numéricos particulares, no ha podido realizarse sin un mínimo de encadenamientos lógicos (quizá no enteramente conscientes, sino más bien del tipo de aquellos en los que se apoya un algebrista moderno cuando realiza un cálculo antes de «poner como es debido» todos sus detalles) ([*232*], p. 203 ss.).

La originalidad esencial de los griegos consiste precisamente en un esfuerzo consciente para escribir las demostraciones matemáticas como una sucesión tal que no haya lugar a dudas al pasar de un eslabón al siguiente, forzando el asentimiento universal. Que los matemáticos griegos se servían en sus investigaciones, al igual que los modernos, de razonamientos «heurísticos» más que demostrativos es algo que quedaría demostrado (si fuese necesario) por el «tratado del método» de Arquímedes [*153* c]; deben notarse también en él alusiones a resultados «hallados, pero no demostrados» por matemáticos anteriores[1]. Pero, a partir de los primeros textos detallados que conocemos (que datan de mediados del siglo V), el «canon» ideal de un texto matemático está perfectamente fijado, y encontrará su realización más perfecta en los grandes clásicos,

[1] Principalmente Demócrito, al que Arquímedes atribuye el descubrimiento de la fórmula del volumen de la pirámide ([*153* c], p. 13). Esta alusión ha de ponerse en relación con un célebre fragmento atribuido a Demócrito (pero cuya autenticidad ha sido puesta en duda) en el que declara: «*Nadie me ha superado nunca en la construcción de figuras por medio de pruebas, ni siquiera los «harpedonaptas» egipcios, como les llaman*» ([89], t. I, p. 439 y t. II 1, pp. 727-728). La observación de Arquímedes y el hecho de que no se haya encontrado ninguna demostración (en el sentido clásico) en los textos egipcios que nos han llegado, inducen a pensar que las «pruebas» a que alude Demócrito no eran consideradas como tales en la época clásica, y tampoco lo serían hoy en día.

Euclides, Arquímedes y Apolonio; la noción de demostración en estos autores no se diferencia en nada de la nuestra.

No poseemos ningún texto que nos permita seguir los primeros pasos de este «método deductivo», que se nos aparece ya próximo a la perfección en el mismo instante en que constatamos su existencia. Podemos solamente pensar que se inscribe de un modo bastante natural en la búsqueda permanente de «explicaciones» del mundo que caracteriza el pensamiento griego y que es ya tan visible en los filósofos jonios del siglo VII; por otra parte, la tradición coincide unánimemente en atribuir el desarrollo y perfeccionamiento del método a la escuela pitagórica, en una época situada entre el final del siglo VI y la mitad del V.

Sobre esta matemática «deductiva», plenamente consciente de sus fines y de sus métodos, va a ejercerse la reflexión filosófica y matemática de las edades posteriores. Por una parte veremos edificarse poco a poco la Lógica «formal» sobre el modelo de las matemáticas, hasta llegar a la creación de lenguajes formalizados; por otra, principalmente desde comienzos del siglo XIX, se pensará cada vez más sobre los conceptos básicos de la Matemática, y se intentará poner en claro su naturaleza, sobre todo después de la aparición de la Teoría de conjuntos.

La formalización de la Lógica

La impresión general que parece desprenderse de los textos (muy fragmentarios) del pensamiento filosófico griego del siglo V que poseemos, es la de estar dominado por un esfuerzo cada vez más consciente para extender a todo el campo del pensamiento humano los procedimientos de articulación del discurso con tanto éxito empleados por la retórica y la matemática contemporáneas; en otras palabras, para crear la Lógica en el sentido más general de la palabra. El tono de los escritos filosóficos sufre en esta época un cambio brusco: mientras en el siglo VII o en el VI los filósofos afirman o vaticinan (o en todo caso esbozan vagos razonamientos, fundados en analogías no menos vagas), a partir de Parménides, y sobre todo de Zenón, argumentan, e intentan extraer unos principios generales que puedan servir de base a su dialéctica; en Parmé-

nides se encuentra la primera afirmación del principio del tercio excluso, y las demostraciones por «reducción al absurdo» de Zenón de Elea se han hecho célebres. Pero Zenón escribía a mediados del siglo v, y, a pesar de las dudas a que pueda dar lugar nuestra documentación[2], es muy razonable pensar que en esta época los matemáticos, en su propio ámbito, se servían usualmente de estos principios.

Como hemos dicho más arriba, no es nuestra misión señalar las innumerables dificultades que han ido surgiendo a cada paso en la gestación de esta Lógica, y las polémicas a que ha dado lugar, desde los eleáticos a Platón y Aristóteles, pasando por los sofistas; solamente haremos notar aquí el papel desempeñado en esta evolución por el arte oratorio y el análisis del lenguaje (que es un corolario de él), desarrollos que se está de acuerdo en atribuir a los sofistas del siglo v. Por otra parte, si no siempre se reconoce explícitamente la influencia de las matemáticas, no por ello es menos evidente, particularmente en los escritos de Platón y Aristóteles. Se ha llegado a decir que Platón estaba casi obsesionado por las matemáticas; sin ser él mismo un creador en este dominio, se puso, a partir de una cierta época de su vida, al corriente de los descubrimientos de los matemáticos contemporáneos (muchos de los cuales eran sus amigos o discípulos), y no dejó nunca de interesarse por ellas de la manera más inmediata, llegando a sugerir nuevas direcciones de investigación; por otra parte, las matemáticas le sirven constantemente de ilustración o de modelo en sus escritos (llegando a alimentar a veces, como en los pitagóricos, su inclinación al misticismo). En cuanto a su discípulo Aristóteles, no pudo por menos de recibir el mínimo de formación matemática que se exigía a los alumnos de la Academia, y se ha formado un volumen con los pasajes de su obra que se relacionan con las matemáticas o que hacen alusión a ellas [*153* d], pero no parece haber hecho un gran esfuerzo para estar en contacto con el movimiento matemático de su época, y

[2] El ejemplo clásico más bello de demostración por reducción al absurdo en matemáticas es la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, a la que Aristóteles alude varias veces, pero los eruditos modernos no han sido capaces de fechar dicho descubrimiento con precisión, situándolo unos al principio y otros completamente al final del siglo v (ver p. 203 y las referencias citadas a este propósito).

en este dominio no cita más que resultados que eran conocidos hacía mucho tiempo. Este retraso no hará más que acentuarse en la mayor parte de los filósofos posteriores, muchos de los cuales, sin preparación técnica, creerán de buena fe hablar de matemáticas con conocimiento de causa, mientras que no hacen otra cosa que referirse a un estadio de la evolución de éstas hace mucho tiempo superado.

La cumbre de este periodo, en lo que a la Lógica se refiere, es la monumental obra de Aristóteles [*6*], cuyo gran mérito reside en haber conseguido sistematizar y codificar por vez primera los procedimientos de razonamiento, confusos o no formulados en sus predecesores[3]. Para nuestro objeto nos es necesario mencionar aquí la tesis fundamental de esta obra, a saber, la de que es posible reducir todo razonamiento correcto a la aplicación sistemática de un pequeño número de reglas fijas, independientes de la naturaleza particular de los objetos de que se trate (independencia puesta claramente de manifiesto por la notación de los conceptos o de las proposiciones mediante letras, tomada probablemente de los matemáticos por Aristóteles). Pero Aristóteles concentra casi exclusivamente su atención sobre un tipo particular de relaciones y de encadenamientos lógicos, que constituyen lo que llama «silogismo»: se trata esencialmente de relaciones que actualmente traduciríamos por $A \subset B$ o $A \cap B \neq \varnothing$ en el lenguaje de la teoría de conjuntos[4],

[3] A pesar de la sencillez y la «evidencia» que parecen presentar para nosotros las reglas lógicas enunciadas por Aristóteles, basta con volver a situarlas dentro de su marco histórico para comprender las dificultades que se oponían a una concepción precisa de estas reglas y el esfuerzo que Aristóteles debió llevar a cabo para conseguirlo. Platón, en sus diálogos, en los que se dirige a un público cultivado, permite todavía que sus personajes entren en discusiones complicadas acerca de cuestiones tan elementales como las relaciones entre la negación de $A \subset B$ y la relación $A \cap B = \varnothing$ (en lenguaje moderno), a reserva de que surja en la continuación la respuesta correcta [*264*].

[4] Los enunciados correspondientes de Aristóteles son «Todo A es B» y «Algún A es B»; en estas notaciones A (el «sujeto») y B (el «predicado») están representando conceptos, y decir que «Todo A es un B» significa que se puede atribuir el concepto B a todo ente al que se puede atribuir el concepto A (A es el concepto «hombre» y B el concepto «mortal» en el ejemplo clásico). La interpretación que nosotros damos de lo anterior consiste en considerar los conjuntos de entes a los que se aplican respectivamente los conceptos A y B, se trata del punto de vista de la «extensión», ya conocido de Aristóteles. Pero este último considera principalmente la relación «Todo A es B» desde otro punto de vista, el de la «comprensión», según el cual B es con-

y de la forma de encadenar estas relaciones, o sus negaciones, por medio del esquema

$$(A \subset B \text{ y } B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$$

Aristóteles estaba de todos modos lo suficientemente informado de las matemáticas de su época como para dejar de darse cuenta de que los esquemas de este tipo no eran suficientes para abarcar todas las operaciones lógicas de los matemáticos, ni de las demás aplicaciones de la Lógica, naturalmente ([*6*], An. Pr., I, 35; [*153* d], pp. 25-26)[5]. Al menos, el estudio detallado de las distintas formas del «silogismo» (y que está consagrado casi íntegramente a dilucidar las eternas dificultades planteadas por la ambigüedad o la oscuridad de los términos a que se refiere el razonamiento) le da la ocasión (entre otras) de formular las reglas para la negación de una proposición ([*6*], An. Pr., I. 46). Corresponde también a Aristóteles el mérito de haber distinguido con gran claridad el papel de las proposiciones «universales» del de las «particulares», primer esbozo de los cuantificadores[6]. Pero sabemos muy bien cómo la influencia de sus escritos (interpretados a menudo de una forma limitada y poco inteligente), que ha sido muy sensible hasta bien avanzado el siglo XIX, debía animar a los filósofos en su negligencia por el estudio de las matemáticas, y bloquear los progresos de la Lógica formal[7].

Esta última continuó progresando sin embargo en la Antigüedad en el seno de las escuelas megárica y estoica, rivales de los peripatéticos. Desgraciadamente todos nuestros conocimientos sobre estas

siderado como uno de los conceptos que constituyen de alguna manera el concepto más complejo A, o que, como dice Aristóteles, le «pertenecen». A primera vista, los dos puntos de vista aparecen como igualmente naturales, pero el punto de vista de la «comprensión» ha sido una causa permanente de dificultades para el desarrollo de la Lógica (parece más alejado de la intuición que el primero, y da lugar fácilmente a errores, sobre todo en aquellos esquemas en los que intervienen negaciones; cf. [*69* a], pp. 21-32).

[5] Para una discusión crítica del silogismo y de sus insuficiencias, ver por ejemplo ([*69* a], pp. 432-441) o ([*164*], pp. 44-50).

[6] La ausencia de verdaderos cuantificadores (en el sentido moderno) hasta finales del siglo XIX ha sido una de las causas del estancamiento de la lógica formal.

[7] Se cita el caso de un eminente universitario que en una conferencia dada recientemente en Princeton, y a la que asistía Gödel, habría dicho que nada nuevo había sido hecho en Lógica desde Aristóteles.

doctrinas son de segunda mano, procediendo muchas veces de adversarios o de comentadores mediocres. El progreso esencial realizado por estos lógicos parece consistir en la creación de un «cálculo proposicional», en el sentido en que lo entendemos hoy; en vez de limitarse, como Aristóteles, a proposiciones de forma particular $A \subset B$, enuncian reglas referentes a proposiciones totalmente *indeterminadas*. Por otra parte, su análisis de las relaciones lógicas entre estas reglas habría sido lo bastante profundo como para ser capaces de deducirlas todas a partir de cinco, consideradas como «indemostrables», empleando procedimientos muy parecidos a los métodos modernos [*23*]. Su influencia fue desgraciadamente muy efímera, y sus resultados permanecieron en el olvido hasta que fueron descubiertos por los lógicos del siglo XIX. Aristóteles continuó siendo el maestro indiscutido en Lógica hasta el siglo XVII; sabemos muy bien que los filósofos escolásticos han permanecido por completo bajo su influencia, y si bien su contribución a la lógica formal no es precisamente despreciable [*25*], no representa ningún progreso de primera magnitud respecto a los realizados por los filósofos de la Antigüedad.

Conviene hacer notar aquí que no parece que los trabajos de Aristóteles o de sus sucesores hayan tenido una influencia notable sobre las matemáticas. Los matemáticos griegos continuaron sus trabajos en la dirección iniciada por los pitagóricos y sus sucesores del siglo IV (Teodoro, Theeteto, Eudoxio) sin preocuparse aparentemente de la lógica formal en la presentación de sus resultados, cosa que no debe extrañarnos si comparamos la precisión y flexibilidad adquiridas ya en esta época por el razonamiento matemático y el estado rudimentario de la lógica aristotélica. Y, al superar la lógica este estadio, serán precisamente los nuevos progresos de las matemáticas los que orienten su evolución.

En efecto, al desarrollarse el álgebra, no podía dejarse de notar la analogía entre las reglas de la Lógica formal y las del álgebra, teniendo ambas el carácter común de aplicarse a objetos (proposiciones o números) no precisados. Y, al tomar la notación algebraica su forma definitiva en el siglo XVII en manos de Descartes y Viète, surgieron inmediatamente diversos intentos de lograr una escritura simbólica, destinada a representar las operaciones lógicas; pero las tentativas anteriores a Leibniz, como por ejemplo la de Herígono

(1644) para escribir las demostraciones de la Geometría elemental, o la de Pell (1659) para las de la Aritmética, fueron muy superficiales, y no llevaron a ningún progreso en el análisis del razonamiento matemático.

Con Leibniz estamos en presencia de un filósofo que es también un matemático de primera fila, que va a extraer de su experiencia matemática el germen de las ideas que harán salir a la Lógica formal del callejón sin salida escolástico[8]. Espíritu universal si los hubo, fuente inagotable de ideas originales y fecundas, Leibniz se interesó tanto más por la Lógica en cuanto que se insertaba en el mismo centro de sus grandes proyectos de formalización del lenguaje y del pensamiento, proyectos en los que no dejó de trabajar durante toda su vida. Diestro desde su infancia en el manejo de la lógica escolástica, había quedado seducido por la idea (que se remontaba a Raimundo Lulio) de un método que reduciría todos los conceptos humanos a conceptos primitivos, formando un «Alfabeto de los pensamientos humanos», y volvería a combinarlos de forma casi mecánica para obtener todas las proposiciones verdaderas ([*198* b], t. VII, p. 185; cf. [*69* a], c. II). Siendo también muy joven había concebido una idea mucho más original, la de la utilidad de las notaciones simbólicas como «hilo de Ariadna» del pensamiento[9]. «*El verdadero método*», dice, «*debe proporcionarnos un* filum Ariadnes, *es decir, un cierto medio sensible y grosero que conduzca al espíritu, como las líneas que se trazan en Geometría y las formas de las operaciones que hacen los que aprenden la Aritmética. Sin él, nuestro espíritu no podría recorrer un camino largo sin perderse*» ([*198* b], t. VII, p. 22; cf. [*69* a], p. 90). Estando poco al corriente de las matemáticas de su época hasta los 25 años, presenta primeramente sus proyectos en la forma de «lengua universal» ([*69* a], c. III); pero desde el momento en que entra en contacto con el Algebra la toma como modelo de su «Característica universal», entendiendo por tal una especie de lenguaje simbólico, capaz de expresar sin ambigüedad todos los pensamientos humanos, de aumentar nuestro poder de deducción, de evitar los errores mediante un esfuerzo de atención completamente mecánico, y construido de tal modo que «*aquellas quimeras que ni siquiera es capaz de entender el mismo que las enuncia no puedan ser escritas con estos caracteres*» ([*198* a], t. I, p. 187). En los innumerables pasajes de sus escritos en que Leibniz hace alusión a este proyecto grandioso y a los progresos que supondría su realización (cf. [*69* a], c. IV y VI), puede apreciarse la claridad con que concebía la idea de un lenguaje formalizado, pura combinación de signos donde solo importaría la manera de enlazarlos[10], de tal modo que una máquina sería capaz de proporcionar todos los teoremas[11], y tal que todas las controversias podrían zanjarse mediante un simple cálculo ([*198* b], t. VII, pp. 198-203). Si bien estas esperanzas pueden parecer desmesuradas, no es por ello menos cierto que debe relacionarse con esta tendencia permanente del pensamiento de Leibniz una buena parte de su obra matemática, empezando por sus trabajos sobre el simbolismo del Cálculo infinitesimal (ver pp. 266-268); el mismo Leibniz era perfectamente consciente de ello, y relacionaba también explícitamente con su «Característica» sus ideas sobre la notación con índices y los determinantes ([*198* a], t. II, p. 204; cf. [*69* a], pp. 481-487), y su esbozo de «Cálculo geométrico» (ver pp. 71 y 91-94; cf. [*69* a], c. IX). Pero para él, la tarea esencial debería ser la Lógica simbólica, o como él decía, un «Calculus ratiocinator», y, si bien no llegó a crear este cálcu-

[8] Aunque Descartes y (en menor grado) Pascal consagrasen una parte de su obra filosófica a los fundamentos de las matemáticas, su contribución a los progresos de la Lógica formal carece de importancia. Esto es sin duda debido a que la tendencia fundamental de su pensamiento, el esfuerzo para emanciparse de la tutela escolástica, les llevaba a rechazar todo aquello que pudiera estar relacionado con ella, y en primer lugar la Lógica formal. De hecho, en sus *Réflexions sur l'esprit géométrique* (Reflexiones sobre el espíritu geométrico), Pascal, como él mismo reconoce, se limita esencialmente a enunciar en fórmulas claras los conocidos principios de las demostraciones euclídeas (por ejemplo, el famoso precepto: «*Sustituir siempre mentalmente los definidos por las definiciones*» ([*244*], t. IX, p. 280) era conocido en lo esencial por Aristóteles ([*6*], Top., VI, 4; [*153* d], p. 87)). En lo que a Descartes se refiere, las reglas de razonamiento que enuncia son ante todo principios psicológicos (bastante vagos) y no criterios lógicos, y que, como le reprocha Leibniz ([*69* a], p. 94 y 202-203), tienen únicamente un alcance subjetivo.

[9] Desde luego, el interés de un simbolismo de este tipo no había pasado desapercibido para los predecesores de Leibniz en lo que a las matemáticas se refiere, y Descartes, por ejemplo, recomienda sustituir figuras enteras «*por signos muy cortos*» (Regla XVI para la dirección del espíritu [*85* a], t. X, p. 454). Pero nadie antes de Leibniz había insistido con tanta fuerza sobre el alcance universal de este principio.

[10] Es curioso verle citar como ejemplos de razonamiento «en forma» «*una cuenta de cobro*» o incluso un texto jurídico ([*198* b], t. IV, p. 295).

[11] Es bien sabido que esta concepción de una «máquina lógica» es empleada en nuestros días en matemáticas, donde resulta extraordinariamente útil ([*181*], c. XIII).

lo, le vemos intentarlo al menos tres veces. En una primera tentativa tiene la idea de asociar a cada término «primitivo» un número primo, correspondiendo a cada término formado por varios términos primitivos el producto de los números primos correspondientes[12]; intenta traducir a este sistema las reglas usuales del silogismo, pero tropieza con dificultades considerables debidas a la negación (que intenta representar, de modo bastante natural, por el cambio de signo) y abandona enseguida este camino ([*198* c], pp. 46-92; cf. [*69* a], pp. 326-344). En intentos posteriores procurará dar a la lógica aristotélica una forma más algebraica; unas veces conserva la notación AB para la conyunción de dos conceptos, mientras que otras emplea la notación A + B[13]; señala (con notación multiplicativa) la ley de idempotencia AA = A, hace notar que puede remplazarse la proposición «todo A es B» por la igualdad A = AB y que a partir de aquí se puede obtener la mayor parte de las reglas de Aristóteles mediante un cálculo puramente algebraico ([*198* c], pp. 229-237 y 356-399; cf. [*69* a], pp. 345-364); tiene también la idea de concepto vacío («no Con») y reconoce, por ejemplo, la equivalencia de las proposiciones «todo A es B» y «A. (no B) no es» (*loc. cit.*). Hace notar, por otra parte, que su cálculo lógico se aplica, no solamente a la lógica de los conceptos, sino también a la de las proposiciones ([*198* c], p. 377). Parece, por tanto, hallarse muy cerca del «cálculo booleano». Desgraciadamente, Leibniz no parece haber conseguido librarse del todo de la influencia escolástica; no solamente se propone como finalidad casi única de su cálculo la transcripción a su notación de las reglas del silogismo[14], sino que llega a sacrificar sus ideas mejores al deseo de volver a encontrar todas las reglas de Aristóteles, incluso aquellas incompatibles con la noción de conjunto vacío[15].

[12] La idea ha sido recogida con éxito por Gödel, en una forma ligeramente diferente, en sus trabajos sobre metamatemática (cf. [*130* a] y [*181*], p. 254).

[13] Leibniz solamente intenta introducir la disyunción en algunas partes de su cálculo (en los que la designa por A + B) y no parece haber conseguido manejar simultáneamente esta operación y la conyunción de forma satisfactoria ([*69* a],

[14] Leibniz sabía muy bien que la lógica aristotélica era insuficiente para traducir formalmente los textos matemáticos, pero, a pesar de ciertos intentos, no parece que llegase nunca a mejorarla en este aspecto ([*69* a], pp. 435 y 560).

[15] Se trata de las llamadas «reglas de conversión» basadas sobre el postulado de que «Todo A es un B» implica «Algún A es un B», lo que naturalmente supone que A no es vacío.

Los trabajos de Leibniz permanecieron en su mayor parte inéditos hasta principios del siglo XX, y tuvieron una influencia directa muy escasa. Durante todo el siglo XVIII y principios del XIX, diversos autores (de Segner, J. Lambert, Ploucquet, Holland, De Castillon, Gergonne) realizan intentos similares a los de Leibniz, sin superar nunca sensiblemente el punto alcanzado por aquél; sus trabajos tuvieron una resonancia muy débil, lo que hizo que la mayor parte de ellos ignorasen por completo los resultados de sus predecesores[16]. En estas mismas condiciones escribió G. Boole, que debe ser considerado como el verdadero creador de la lógica simbólica moderna [*29*]. Su idea fundamental consiste en situarse sistemáticamente en el punto de vista de la «extensión», es decir, en calcular directamente con conjuntos, designando por xy la intersección de dos conjuntos, y por $x + y$ su unión cuando x e y no tienen ningún elemento común. Introduce además un «universo» designado por 1 (conjunto de todos los objetos) y el conjunto vacío designado por 0, y usa la notación $1 - x$ para el complementario de x. Como había ya hecho Leibniz interpreta la relación de inclusión mediante la relación $xy = x$ (obteniendo sin dificultad a partir de aquí la justificación de las reglas del silogismo clásico) y sus notaciones para la unión y el complementario dan a su sistema una flexibilidad de la que habían carecido sus antecesores[17]. Además, al asociar a una proposición el conjunto de «casos» en los que se verifica, interpreta la relación de implicación como una inclusión, y su cálculo con conjuntos le proporciona de este modo las reglas del «Cálculo proposicional».

En la segunda mitad del siglo XIX el sistema de Boole sirve como punto de partida para los trabajos de una activa escuela de lógicos, que lo perfeccionan y completan en diversos puntos. Jevons (1864) amplía el sentido de la operación de unión $x + y$, extendiéndola al

[16] A la influencia de Kant, a partir de mediados del siglo XVIII, se debe en parte sin duda el poco interés suscitado por la lógica simbólica en esta época; Kant estima que «*no necesitamos ninguna nueva invención en lógica*», siendo suficiente la forma dada a ésta por Aristóteles para todas las aplicaciones que se le pueden dar ([*178*, t. VIII], p. 340). Acerca de las concepciones dogmáticas de Kant a propósito de las matemáticas y de la lógica podrá consultarse [*69* b].

[17] Señalemos en particular que Boole emplea la distributividad de la intersección respecto a la unión, que parece haber sido señalada por primera vez por J. Lambert.

caso en que x e y son cualesquiera; A. de Morgan en 1858 y C. S. Peirce en 1867 demuestran las relaciones de dualidad

$$(\complement A) \cap (\complement B) = \complement (A \cup B), \qquad (\complement A) \cup (\complement B) = \complement (A \cap B)^{18};$$

De Morgan inicia también, en 1860, el estudio de las relaciones, definiendo la inversión y la composición de relaciones binarias (es decir, las operaciones que corresponden a las operaciones $\overset{-1}{G}$ y $G_1 \circ G_2$ para las gráficas)[19]. Todos estos trabajos se encuentran expuestos y desarrollados sistemáticamente en la maciza y prolija obra de Schröder [*277*]. Pero resulta bastante curioso el poner de manifiesto que los lógicos de los que acabamos de hablar no parecieron interesarse mucho por la aplicación de sus resultados a las matemáticas, y que, por el contrario, Boole y Schröder, principalmente, parecían tener la finalidad fundamental de desarrollar el álgebra «booleana» calcando sus métodos y sus problemas sobre los del álgebra clásica (muchas veces de forma bastante artificial). Las razones de dicha actitud residen, sin duda, en el hecho de que el cálculo booleano no era todavía lo bastante cómodo como para transcribir la mayor parte de los razonamientos matemáticos[20], y no era más que una respuesta muy limitada al gran sueño de Leibniz. La construcción de formalismos mejor adaptados a las matemáticas —cuya etapa capital está constituida por la introducción de las variables y de los cuantificadores, debida independientemente a Frege [*117* a, b, c] y C. S. Peirce [*248* b]— fue realizada por lógicos y matemáticos, que a diferencia de los anteriores, se preocupaban fundamentalmente de las aplicaciones a los fundamentos de las matemáticas.

[18] Hay que señalar que en algunos filósofos escolásticos se encuentran ya enunciados equivalentes a estas reglas ([*25*], pp. 67 ss.).

[19] Sin embargo, la noción de producto «cartesiano» de dos conjuntos cualesquiera solamente es introducida explícitamente por G. Cantor ([*47*], p. 286), también es Cantor el primero en definir la exponenciación A^B (*loc. cit.*, p. 287); la noción general de producto infinito se debe a A. N. Whitehead ([*333*], p. 369). El empleo de las gráficas de las relaciones, supuesto que no se tiene en cuenta el caso clásico de las funciones reales de variables reales, es bastante reciente, y parece observarse por primera vez en los geómetras italianos, sobre todo en C. Segre, en su estudio de las correspondencias algebraicas.

[20] Para *cada* relación obtenida a partir de una o varias relaciones dadas mediante la aplicación de nuestros cuantificadores sería necesario en este cálculo introducir una notación *ad hoc* del tipo de las notaciones $\overset{-1}{G}$ y $G_1 \circ G_2$ (cf. por ejemplo [*248* b]).

El proyecto de Frege [*117* b y c] era el de fundamentar la aritmética sobre una lógica formalizada mediante una «escritura conceptual» (Begriffschrift) y más adelante (p. 50) nos referiremos a la forma en que define los enteros naturales. Sus obras se caracterizan por una precisión y una minuciosidad extremas en el análisis de los conceptos, lo que le lleva a introducir distinciones que han tenido gran importancia en la lógica moderna: por ejemplo, es el primero en distinguir el enunciado de una proposición y la afirmación de que dicha proposición es verdadera, entre la relación de pertenencia y la de inclusión, entre un objeto x y el conjunto $\{x\}$ formado por este único objeto, etcétera. Su lógica formalizada, en la que no solamente aparecen «variables» en el sentido matemático de la palabra, sino también «variables proposicionales» representando relaciones indeterminadas y susceptibles de cuantificación, se convertiría más tarde, a través de la obra de Russell y Whitehead, en el instrumento fundamental de la metamatemática. Desgraciadamente, los símbolos que adopta son poco sugestivos, de una espantosa complejidad tipográfica, y muy alejados de la práctica de los matemáticos; la consecuencia de esto fue el alejamiento de estos últimos y una reducción considerable de la influencia de Frege sobre sus contemporáneos.

La finalidad de Peano era más amplia y más realista a la vez, se trataba de publicar un «Formulario de matemáticas», escrito totalmente en lenguaje formalizado, y conteniendo, no solamente la lógica matemática, sino todos los resultados de las partes más importantes de las matemáticas. La rapidez con la que consiguió realizar este ambicioso proyecto, ayudado por una serie de colaboradores entusiastas (Vailati, Pieri, Padoa, Vacca, Vivanti, Fano, Burali-Forti), pone de manifiesto la conveniencia del simbolismo adoptado: siguiendo de cerca la práctica corriente de los matemáticos, e introduciendo numerosas abreviaturas simbólicas bien elegidas, su lenguaje continuó siendo fácilmente legible, gracias principalmente a un ingenioso sistema de sustitución de paréntesis por puntos de separación [*246* f]. Muchas notaciones debidas a Peano son usadas hoy día por la mayor parte de los matemáticos: citemos $\in$, $\supset$ (pero, al revés

caso en que x e y son cualesquiera; A. de Morgan en 1858 y C. S. Peirce en 1867 demuestran las relaciones de dualidad

$$(\complement A) \cap (\complement B) = \complement (A \cup B), \qquad (\complement A) \cup (\complement B) = \complement (A \cap B)^{18};$$

De Morgan inicia también, en 1860, el estudio de las relaciones, definiendo la inversión y la composición de relaciones binarias (es decir, las operaciones que corresponden a las operaciones $\overset{-1}{G}$ y $G_1 \circ G_2$ para las gráficas)[19]. Todos estos trabajos se encuentran expuestos y desarrollados sistemáticamente en la maciza y prolija obra de Schröder [*277*]. Pero resulta bastante curioso el poner de manifiesto que los lógicos de los que acabamos de hablar no parecieron interesarse mucho por la aplicación de sus resultados a las matemáticas, y que, por el contrario, Boole y Schröder, principalmente, parecían tener la finalidad fundamental de desarrollar el álgebra «booleana» calcando sus métodos y sus problemas sobre los del álgebra clásica (muchas veces de forma bastante artificial). Las razones de dicha actitud residen, sin duda, en el hecho de que el cálculo booleano no era todavía lo bastante cómodo como para transcribir la mayor parte de los razonamientos matemáticos[20], y no era más que una respuesta muy limitada al gran sueño de Leibniz. La construcción de formalismos mejor adaptados a las matemáticas —cuya etapa capital está constituida por la introducción de las variables y de los cuantificadores, debida independientemente a Frege [*117* a, b, c] y C. S. Peirce [*248* b]— fue realizada por lógicos y matemáticos, que a diferencia de los anteriores, se preocupaban fundamentalmente de las aplicaciones a los fundamentos de las matemáticas.

[18] Hay que señalar que en algunos filósofos escolásticos se encuentran ya enunciados equivalentes a estas reglas ([*25*], pp. 67 ss.).

[19] Sin embargo, la noción de producto «cartesiano» de dos conjuntos cualesquiera solamente es introducida explícitamente por G. Cantor ([*47*], p. 286), también es Cantor el primero en definir la exponenciación A^B (*loc. cit.*, p. 287); la noción general de producto infinito se debe a A. N. Whitehead ([*333*], p. 369). El empleo de las gráficas de las relaciones, supuesto que no se tiene en cuenta el caso clásico de las funciones reales de variables reales, es bastante reciente, y parece observarse por primera vez en los geómetras italianos, sobre todo en C. Segre, en su estudio de las correspondencias algebraicas.

[20] Para *cada* relación obtenida a partir de una o varias relaciones dadas mediante la aplicación de nuestros cuantificadores sería necesario en este cálculo introducir una notación *ad hoc* del tipo de las notaciones $\overset{-1}{G}$ y $G_1 \circ G_2$ (cf. por ejemplo [*248* b]).

El proyecto de Frege [*117* b y c] era el de fundamentar la aritmética sobre una lógica formalizada mediante una «escritura conceptual» (Begriffschrift) y más adelante (p. 50) nos referiremos a la forma en que define los enteros naturales. Sus obras se caracterizan por una precisión y una minuciosidad extremas en el análisis de los conceptos, lo que le lleva a introducir distinciones que han tenido gran importancia en la lógica moderna: por ejemplo, es el primero en distinguir el enunciado de una proposición y la afirmación de que dicha proposición es verdadera, entre la relación de pertenencia y la de inclusión, entre un objeto x y el conjunto $\{x\}$ formado por este único objeto, etcétera. Su lógica formalizada, en la que no solamente aparecen «variables» en el sentido matemático de la palabra, sino también «variables proposicionales» representando relaciones indeterminadas y susceptibles de cuantificación, se convertiría más tarde, a través de la obra de Russell y Whitehead, en el instrumento fundamental de la metamatemática. Desgraciadamente, los símbolos que adopta son poco sugestivos, de una espantosa complejidad tipográfica, y muy alejados de la práctica de los matemáticos; la consecuencia de esto fue el alejamiento de estos últimos y una reducción considerable de la influencia de Frege sobre sus contemporáneos.

La finalidad de Peano era más amplia y más realista a la vez, se trataba de publicar un «Formulario de matemáticas», escrito totalmente en lenguaje formalizado, y conteniendo, no solamente la lógica matemática, sino todos los resultados de las partes más importantes de las matemáticas. La rapidez con la que consiguió realizar este ambicioso proyecto, ayudado por una serie de colaboradores entusiastas (Vailati, Pieri, Padoa, Vacca, Vivanti, Fano, Burali-Forti), pone de manifiesto la conveniencia del simbolismo adoptado: siguiendo de cerca la práctica corriente de los matemáticos, e introduciendo numerosas abreviaturas simbólicas bien elegidas, su lenguaje continuó siendo fácilmente legible, gracias principalmente a un ingenioso sistema de sustitución de paréntesis por puntos de separación [*246* f]. Muchas notaciones debidas a Peano son usadas hoy día por la mayor parte de los matemáticos: citemos $\in$, $\supset$ (pero, al revés

del uso actual, en el sentido de «contenido» o «implica»)[21], $\cup$, $\cap$, A − B (conjunto de las diferencias $a-b$, cuando $a \in$ A y $b \in$ B). Por otra parte, en el «Formulario» se encuentra por primera vez un análisis detallado de la noción general de función y de las de imagen directa[22] e imagen recíproca, y la consideración de que una sucesión no es otra cosa que una función definida en N. Pero la cuantificación, en Peano, está sometida a restricciones muy molestas (en su sistema no se pueden cuantificar, en principio, más que relaciones de la forma A $\Rightarrow$ B, A $\Leftrightarrow$ B o A = B). Además, el celo de algunos discípulos, que rozaba el fanatismo, se prestaba fácilmente a la burla; la crítica, a menudo injusta, en particular la de H. Poincaré, hizo un daño considerable a la escuela de Peano, y dificultó la difusión de sus doctrinas entre el mundo matemático.

Con Frege y Peano se adquieren los elementos fundamentales de los lenguajes formalizados utilizados hoy en día. El más extendido de ellos es, sin duda, el debido a Russell y Whitehead (en su gran obra «*Principia Mathematica*»), que asocia de forma afortunada la precisión de Frege y la comodidad de Peano [*266*]. La mayor parte de los lenguajes formalizados actuales no se diferencian de él más que en detalles de importancia secundaria, introducidos para simplificar su uso. Entre las más ingeniosas, citaremos la escritura «funcional» de las relaciones (por ejemplo, $\in xy$ en vez de $x \in y$), debida a Lukasiewicz, gracias a la cual se puede prescindir por completo de los paréntesis; la más interesante es, sin duda, la introducción, por Hilbert, del símbolo τ, que permite considerar los cuantificadores $\exists$ y $\forall$ como abreviaturas, evitar la introducción del símbolo funcional «universal» ι de Peano y Russell (que no se aplica más que a relaciones funcionales), y permite finalmente evitar la formulación del axioma de elección de la teoría de conjuntos ([*163* a], t. III, p. 183).

La noción de verdad en matemáticas

Los matemáticos han estado siempre convencidos de que demostraban «verdades» o «proposiciones verdaderas»; una convicción

[21] Esto indica bien claramente hasta qué punto estaba arraigada, incluso en él, la vieja costumbre de pensar «en comprensión» en vez de «en extensión».

[22] Su introducción parece deberse a Dedekind, en su obra «Was sind und was sollen die Zahlen», de la que hablaremos más adelante ([*79*], t. III, p. 348).

de este tipo no puede ser, evidentemente, más que de orden sentimental o metafísico, y no es precisamente colocándose en el terreno de la matemática como se la puede justificar, ni siquiera cómo puede dársele un sentido que no la convierta en una tautología. La historia del concepto de verdad en matemáticas corresponde, pues, a la historia de la filosofía y no a la de las matemáticas, pero la evolución de este concepto ha tenido una influencia innegable sobre la de las matemáticas, y esto hace que no podamos dejar de tenerla en cuenta.

Observemos en primer lugar, que no es menos extraño encontrar un filósofo con amplios conocimientos de matemáticas que un matemático con una sólida cultura filosófica; las ideas de los matemáticos sobre las cuestiones de orden filosófico, incluso cuando estas cuestiones afectan a su ciencia, son casi siempre opiniones recibidas de segunda o tercera mano, procedentes de fuentes de valor muy dudoso. Pero, precisamente por esta razón, estas opiniones «medias» interesan al historiador de las matemáticas tanto por lo menos como las ideas originales de pensadores como Descartes o Leibniz (para citar dos que han sido también matemáticos de primera fila), Platón (que al menos estaba al corriente de las matemáticas de su época) y Aristóteles o Kant (de los que no podría decirse lo mismo).

La noción tradicional de verdad matemática es la que se remonta al Renacimiento. En esta concepción no se hace gran distinción entre los objetos de los que se ocupan los matemáticos y los considerados por las ciencias de la naturaleza, unos y otros son cognoscibles, y el hombre llega a ellos simultáneamente mediante la intuición y el razonamiento, de los que no había ningún motivo para dudar y que no fallaban más que si no se usaban debidamente. «*Sería necesario*», dice Pascal, «*tener el espíritu completamente trastocado para razonar mal acerca de principios tan claros que es imposible que se escapen*» ([*244*], t. XII, p. 9). Descartes, junto a su estufa, se convence de que «*solo los matemáticos han podido encontrar algunas demostraciones, es decir, algunas razones ciertas y evidentes*» ([*85* a], t. VI, p. 19) y esto (si nos atenemos a lo que nos dice) mucho antes de haber construido una metafísica en la que «*esto mismo*», dice, «*que he tomado tantas veces como regla, a saber, que las cosas que concebimos de un modo muy claro y muy bien distinguidas son todas verdaderas, solo está asegurado por el hecho de que Dios es o existe y es un ser perfecto*» ([*85* a]), t. VI, p. 38). Si bien Leibniz objeta a Descartes que no se ve

del uso actual, en el sentido de «contenido» o «implica»)[21], $\cup$, $\cap$, A − B (conjunto de las diferencias $a-b$, cuando $a \in A$ y $b \in B$): Por otra parte, en el «Formulario» se encuentra por primera vez un análisis detallado de la noción general de función y de las de imagen directa[22] e imagen recíproca, y la consideración de que una sucesión no es otra cosa que una función definida en **N**. Pero la cuantificación, en Peano, está sometida a restricciones muy molestas (en su sistema no se pueden cuantificar, en principio, más que relaciones de la forma $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ o $A = B$). Además, el celo de algunos discípulos, que rozaba el fanatismo, se prestaba fácilmente a la burla; la crítica, a menudo injusta, en particular la de H. Poincaré, hizo un daño considerable a la escuela de Peano, y dificultó la difusión de sus doctrinas entre el mundo matemático.

Con Frege y Peano se adquieren los elementos fundamentales de los lenguajes formalizados utilizados hoy en día. El más extendido de ellos es, sin duda, el debido a Russell y Whitehead (en su gran obra «*Principia Mathematica*»), que asocia de forma afortunada la precisión de Frege y la comodidad de Peano [*266*]. La mayor parte de los lenguajes formalizados actuales no se diferencian de él más que en detalles de importancia secundaria, introducidos para simplificar su uso. Entre las más ingeniosas, citaremos la escritura «funcional» de las relaciones (por ejemplo, $\in xy$ en vez de $x \in y$), debida a Lukasiewicz, gracias a la cual se puede prescindir por completo de los paréntesis; la más interesante es, sin duda, la introducción, por Hilbert, del símbolo τ, que permite considerar los cuantificadores $\exists$ y $\forall$ como abreviaturas, evitar la introducción del símbolo funcional «universal» ι de Peano y Russell (que no se aplica más que a relaciones funcionales), y permite finalmente evitar la formulación del axioma de elección de la teoría de conjuntos ([*163* a], t. III, p. 183).

La noción de verdad en matemáticas

Los matemáticos han estado siempre convencidos de que demostraban «verdades» o «proposiciones verdaderas»; una convicción

[21] Esto indica bien claramente hasta qué punto estaba arraigada, incluso en él, la vieja costumbre de pensar «en comprensión» en vez de «en extensión».

[22] Su introducción parece deberse a Dedekind, en su obra «Was sind und was sollen die Zahlen», de la que hablaremos más adelante ([*79*], t. III, p. 348).

de este tipo no puede ser, evidentemente, más que de orden sentimental o metafísico, y no es precisamente colocándose en el terreno de la matemática como se la puede justificar, ni siquiera cómo puede dársele un sentido que no la convierta en una tautología. La historia del concepto de verdad en matemáticas corresponde, pues, a la historia de la filosofía y no a la de las matemáticas, pero la evolución de este concepto ha tenido una influencia innegable sobre la de las matemáticas, y esto hace que no podamos dejar de tenerla en cuenta.

Observemos en primer lugar, que no es menos extraño encontrar un filósofo con amplios conocimientos de matemáticas que un matemático con una sólida cultura filosófica; las ideas de los matemáticos sobre las cuestiones de orden filosófico, incluso cuando estas cuestiones afectan a su ciencia, son casi siempre opiniones recibidas de segunda o tercera mano, procedentes de fuentes de valor muy dudoso. Pero, precisamente por esta razón, estas opiniones «medias» interesan al historiador de las matemáticas tanto por lo menos como las ideas originales de pensadores como Descartes o Leibniz (para citar dos que han sido también matemáticos de primera fila), Platón (que al menos estaba al corriente de las matemáticas de su época) y Aristóteles o Kant (de los que no podría decirse lo mismo).

La noción tradicional de verdad matemática es la que se remonta al Renacimiento. En esta concepción no se hace gran distinción entre los objetos de los que se ocupan los matemáticos y los considerados por las ciencias de la naturaleza, unos y otros son cognoscibles, y el hombre llega a ellos simultáneamente mediante la intuición y el razonamiento, de los que no había ningún motivo para dudar y que no fallaban más que si no se usaban debidamente. «*Sería necesario*», dice Pascal, «*tener el espíritu completamente trastocado para razonar mal acerca de principios tan claros que es imposible que se escapen*» ([*244*], t. XII, p. 9). Descartes, junto a su estufa, se convence de que «*solo los matemáticos han podido encontrar algunas demostraciones, es decir, algunas razones ciertas y evidentes*» ([*85* a], t. VI, p. 19) y esto (si nos atenemos a lo que nos dice) mucho antes de haber construido una metafísica en la que «*esto mismo*», dice, «*que he tomado tantas veces como regla, a saber, que las cosas que concebimos de un modo muy claro y muy bien distinguidas son todas verdaderas, solo está asegurado por el hecho de que Dios es o existe y es un ser perfecto*» ([*85* a]), t. VI, p. 38). Si bien Leibniz objeta a Descartes que no se ve

muy claramente la forma de reconocer cuándo una idea es «clara y distinta»[23], él mismo considera, igualmente, los axiomas como consecuencias evidentes e ineludibles de las definiciones, una vez entendidos sus términos[24]. No hay que olvidar que, en el lenguaje de la época, las matemáticas abarcaban otras ciencias que hoy día ya se han separado de ellas, incluyendo el arte de la ingeniería; y los sorprendentes éxitos de sus aplicaciones a la «filosofía natural», a las «artes mecánicas», y a la navegación, contribuyeron en gran parte a justificar la confianza que inspiraban.

Desde este punto de vista, los axiomas no son más susceptibles de ser discutidos o puestos en duda que las reglas del razonamiento, en todo caso puede dejarse a cada uno que elija, según sus preferencias, entre razonar «a la manera de los antiguos» o dejar libre curso a su intuición. La elección del punto de partida es también cuestión de preferencia individual, y aparecen numerosas «ediciones» de Euclides donde el sólido entramado lógico de los *Elementos* se disfraza extrañamente; se hacen exposiciones pretendidamente deductivas del Cálculo infinitesimal y de la mecánica racional sobre bases especialmente mal asentadas; y probablemente Spinoza obraba de buena fe al considerar su *Etica* demostrada a la manera de los geómetras, «more geometrico demonstrata». Aunque es difícil encontrar en el siglo XVII dos matemáticos de acuerdo sobre una cuestión cualquiera, aunque las polémicas son cotidianas, interminables, y acres, no por

[23] «*Aquellos que nos han dado métodos*», dice con este motivo, «*dan sin duda bellos preceptos, pero no indican la manera de observarlos*» ([*198* b], t. VII, p. 21). Además, ridiculizando las reglas cartesianas, las compara con las recetas de los alquimistas: «*Toma lo que hace falta, opera como debes, y obtendrás lo que deseas*» ([*198* b], t. IV, p. 329).

[24] En este punto, Leibniz continúa aún bajo la influencia escolástica, piensa siempre en las proposiciones en tanto que establecen una relación de «sujeto» a «predicado» entre conceptos. Una vez que se han reducido los conceptos a conceptos «primitivos» (lo que, como hemos visto, es una de sus ideas fundamentales), todo se reducía entonces, para Leibniz, a verificar relaciones de «inclusión» por medio de lo que él llama «axiomas idénticos» (esencialmente las proposiciones $A = A$ y $A \subset A$) y del principio de «sustitución de equivalentes» (si $A = B$, se puede remplazar en todas partes A por B [*69* a], pp. 184-206)). Es interesante señalar con este motivo que en su deseo de reducir todo a la Lógica y de «demostrar todo lo que es demostrable», Leibniz demuestra la simetría y transitividad de la relación de igualdad a partir del axioma $A = A$ y del principio de sustitución de equivalentes ([*198* a], t. VII, páginas 77-78).

ello deja de ponerse en cuestión la noción de verdad. «*No habiendo más que una verdad para cada cosa*», dice Descartes, «*aquél que la encuentra, sabe todo lo que puede saberse de ella*» ([*85* a], t. VI, p. 21).

Aunque no se haya conservado ningún texto matemático griego de la época antigua, la opinión de los matemáticos griegos sobre la cuestión era probablemente mucho más matizada. Las reglas del razonamiento han tenido que elaborarse necesariamente en contacto con la experiencia para poder llegar a ofrecer una completa confianza; antes de poder llegar a considerarlas indiscutibles ha tenido necesariamente que pasarse por muchos tanteos y paralogismos. Habría que desconocer el espíritu crítico de los griegos y su gusto por la discusión y la sofística, para poder pensar que los mismos «axiomas» que a Pascal le parecían más evidentes (y que, según una leyenda extendida por su hermana, él mismo habría descubierto en su infancia con un instinto infalible) no fueron objeto de largas discusiones. En un dominio distinto del de la geometría propiamente dicha, las paradojas de los eleáticos nos han transmitido algún eco de tales polémicas; y Arquímedes, cuando hace notar ([*5* b], t. II, p. 265) que sus predecesores se sirvieron en algunas ocasiones del axioma que hoy lleva su nombre, añade que aquello que se demuestra usando este axioma «*no es menos aceptado que lo que se demuestra sin él*», y que se conforma con que sus propios resultados se acepten de la misma forma. Platón, de acuerdo con sus puntos de vista metafísicos, presenta la matemática como una forma de acceso a una «verdad en sí», y considera que los objetos acerca de los que versa poseen una existencia propia en el mundo de las ideas, pero no por ello deja de caracterizar con precisión el método matemático en un célebre pasaje de la *República*: «*Aquéllos que se ocupan de aritmética y de geometría... suponen lo par y lo impar, y tres clases de ángulos, y los consideran como cosas conocidas; una vez aceptadas, consideran que no tienen que dar cuenta de ellas ni a sí mismos ni a los demás* (considerándolas) *como evidentes para todos, y, a partir de aquí proceden ordenadamente, para llegar de común acuerdo a la finalidad que se habían propuesto*» ([*250*], Libro VI, 510 *c-e*). Lo que constituye la demostración es, en primer lugar, un punto de partida en el que aparece algo arbitrario (aunque «evidente para todos») y más allá del cuál, como dice un poco más adelante, no se intenta ir; después, un proceso que recorre ordenadamente una serie de etapas interme-

dias; y, finalmente, en cada paso, el consentimiento del interlocutor que garantiza la corrección del razonamiento. Es necesario añadir que, una vez fijados los axiomas, no se admite en principio ningún uso de la intuición: Proclo, citando a Gémino, recuerda que «*hemos aprendido de los mismos pioneros de esta ciencia a no hacer ningún caso de conclusiones simplemente plausibles cuando se trata de razonamientos que deben formar parte de nuestra doctrina geométrica*» ([*153* e], t. I, p. 203).

Parece, pues, que fue en contacto con la experiencia y bajo el fuego de la crítica como debieron elaborarse las reglas del razonamiento matemático, y si es cierto, como se ha sostenido de forma plausible [*317* d], que el Libro VIII de Euclides nos ha conservado una parte de la aritmética de Arquitas, no sería extraño ver en él la rigidez de razonamiento un poco pedantesca que no deja de aparecer en toda escuela matemática en la que se cree haber descubierto el «rigor». Pero, una vez que se ha entrado en la práctica de los matemáticos, no parece que estas reglas de razonamiento hayan sido nunca puestas en duda hasta una época muy reciente; si bien, en Aristóteles y los estoicos, algunas de estas reglas se deducen a partir de otras mediante ciertos esquemas de razonamiento, las reglas primitivas se aceptan siempre como evidentes. Igualmente, después de haberse remontado hasta los «axiomas», «postulados», e «hipótesis» que les parecía dotaban de una base sólida a la ciencia de su época (que es, por ejemplo, como debieron presentarse en los primeros «Elementos», atribuidos por la tradición a Hipócrates de Chíos, hacia 450 a. de J. C.), los matemáticos griegos del periodo clásico parecen haber dedicado sus esfuerzos a la consecución de nuevos resultados más que a una crítica de los fundamentos, que, en esta época, habría resultado forzosamente estéril; y, dejando aparte toda preocupación metafísica, el texto de Platón, arriba citado, nos da testimonio de este acuerdo general de los matemáticos acerca de las bases de su ciencia.

Por otro lado, los matemáticos griegos no parecen haber creído nunca poder dilucidar las «nociones primeras» que les sirven de punto de partida, línea recta, superficie, razón de magnitudes; si bien dan «definiciones» de ellas es evidentemente para tranquilizar su conciencia y sin hacerse ilusiones sobre su alcance. No hay que decir que, por el contrario, acerca de las definiciones distintas de las

«nociones primeras» (definiciones llamadas a veces «nominales») los matemáticos y filósofos griegos tenían ideas perfectamente claras. En este contexto aparece explícitamente, sin duda por primera vez, el problema de la «existencia» en matemáticas. Aristóteles no deja de observar que una definición no implica la existencia de la cosa definida, y que es necesario, o bien un postulado, o bien una demostración. Su observación provenía, sin duda, de la práctica de los matemáticos, en cualquier caso Euclides tiene buen cuidado de postular la existencia del círculo, y de demostrar las del triángulo equilátero, las paralelas, el cuadrado, a medida que los va introduciendo en sus razonamientos ([*153* e], Libro I); estas demostraciones son «construcciones», dicho de otra manera, exhibe, apoyándose en los axiomas, objetos matemáticos que demuestra satisfacen las definiciones que se trata de justificar.

Vemos así cómo la matemática griega llega, en la época clásica, a una especie de certeza empírica (cualesquiera que puedan ser las bases metafísicas en tal o cual filósofo); si no se concibe que puedan ponerse en duda las reglas del razonamiento, el éxito de la ciencia griega, y el sentimiento que se tiene de lo inoportuno de una revisión crítica, residen para muchos en la confianza que se tiene en los axiomas propiamente dichos, confianza del tipo de la (también casi ilimitada) que se otorgaba en el siglo pasado a los principios de la física teórica. Esto mismo sugiere el adagio escolástico «*nihil est in intellectu quod non prius fuerit in sensu*»; contra el que se alza justamente Descartes, en tanto que no proporcionaba una base lo bastante sólida para lo que él quería obtener a partir del uso de la razón.

Hay que esperar hasta principios del siglo XIX para ver cómo los matemáticos descienden, desde la arrogancia de un Descartes (sin hablar de la de un Kant, o de la de un Hegel, algo atrasado este último respecto a la ciencia de su época, como debe ser[25]) hasta una posición tan matizada como la de los griegos. El primer golpe dado a las concepciones clásicas es la construcción de la geometría hiperbólica por Gauss, Lobatschevski y Bolyai a principios de siglo. No intentaremos aquí describir la génesis de este descubrimiento, coronación de numerosas tentativas infructuosas de demostrar el postulado de

[25] En su disertación inaugural, «demuestra» que solamente pueden existir siete planetas, el mismo año que se descubría el octavo.

las paralelas (ver [*105* a y b]). Por lo pronto, su efecto sobre los principios de las matemáticas no fue tan profundo como a veces se dice. Simplemente, obligó a abandonar las pretensiones del siglo anterior sobre la «verdad absoluta» de la Geometría euclídea, y, con más razón, el punto de vista leibniziano de las definiciones implicando los axiomas; éstos dejarán de aparecer como «evidentes» para pasar a ser hipótesis cuya adaptación a la representación matemática del mundo sensible se trata de comprobar. Gauss y Lobatschevski creían que la discusión entre las diversas geometrías podía ser zanjada por la experiencia ([*206*], p. 76). Este es también el punto de vista de Riemann, cuya célebre lección inaugural «*Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría*» tiene la finalidad de dotar de un cuadro matemático general a los distintos fenómenos naturales: «*Hay que resolver*», dice, «*el problema de saber en qué medida y hasta qué punto estas hipótesis son confirmadas por la experiencia*» ([*259* a], p. 284). Pero éste es un problema que no tiene evidentemente nada que ver con las matemáticas, y ninguno de los autores anteriores parece dudar de que, incluso si una «geometría» no está de acuerdo con la realidad experimental, no por ello sus teoremas dejan de ser «verdades matemáticas»[26].

Si bien esto es así, dicha convicción no debe atribuirse a una confianza ilimitada en la «intuición geométrica» clásica; la descripción que Riemann intenta dar de las «multiplicidades extendidas n veces», objeto de sus trabajos, solamente se apoya en consideraciones «intuitivas»[27] para justificar la introducción de «coordenadas locales»; a partir de aquí se siente en un terreno sólido en apariencia, a saber, en el del Análisis. Pero este último se funda en último término sobre el concepto de número real, que no había tenido hasta entonces más que un carácter muy intuitivo, y los progresos de la teoría de funciones condujeron a resultados inquietantes en este aspecto; con los trabajos del mismo Riemann sobre la integración, y sobre todo con los ejemplos de curvas sin tangente construidos por Weierstrass

[26] Cf. los argumentos de Poincaré a favor de la «sencillez» y «comodidad» de la geometría euclídea ([*251* c], p. 67) así como el análisis por medio del cual llega, un poco después, a la conclusión de que la experiencia no proporciona un criterio absoluto para elegir una geometría y no otra como marco de los fenómenos naturales.

[27] Esta palabra solamente está justificada para $n \leq 3$, para valores de n mayores se trata en realidad de un razonamiento por analogía.

y Bolzano daba comienzo toda la patología de las matemáticas. Desde hace un siglo hemos visto tantos monstruos de esta especie que estamos ya un poco hartos, y es necesario acumular los caracteres teratológicos más retorcidos para conseguir impresionarnos. Pero los efectos producidos sobre la mayoría de los matemáticos del siglo XIX iban desde la repulsa hasta la consternación: «*¿Cómo puede la intuición engañarnos hasta ese punto?*», se pregunta H. Poincaré ([*251* d], p. 19); y Hermite (no sin un cierto humor que no todos los comentadores de esta célebre frase parecen haber notado) declara: «*alejarse con horror y espanto de esta turba lamentable de funciones continuas que carecen de derivada*» ([*160*], t. II, p. 318). Lo peor era que estos fenómenos, tan contrarios al sentido común, no podían ser arrinconados en el montón de las nociones insuficientemente aclaradas, como en la época de los «indivisibles» (ver p. 237) puesto que eran posteriores a la reforma de Bolzano, Abel, y Cauchy que había permitido fundamentar la noción de límite de un modo tan riguroso como la teoría de las proporciones (ver p. 212). Era, pues, necesario aceptar el carácter incompleto y grosero de nuestra intuición geométrica, y es comprensible el hecho de que desde entonces haya quedado descalificada con razón como método de demostración.

Esta constatación tenía necesariamente que influir sobre las matemáticas clásicas, empezando por la geometría. Cualquiera que fuese el respeto sentido por la construcción axiomática de Euclides, no por ello habían dejado de notarse algunas imperfecciones, y esto ya desde la antigüedad. El postulado de las paralelas había sido el blanco del mayor número de críticas y de intentos de demostración, pero los continuadores y comentadores de Euclides habían intentado igualmente demostrar otros postulados (principalmente el de la igualdad de los ángulos rectos) y reconocido lo insuficiente de algunas definiciones, como las de recta o plano. En el siglo XVI un editor de los *Elementos*, Clavius, hace notar la falta de un postulado que asegure la existencia de la cuarta proporcional. Leibniz, por su parte, señala que Euclides emplea la intuición geométrica sin indicarlo explícitamente, por ejemplo cuando admite (*Elementos*, Libro I, Prop. 1) que dos círculos cada uno de los cuales pasa por el centro del otro tienen un punto común ([*198* b], t. VII, p. 166). Gauss (que no dejaba de usar él mismo consideraciones topológicas de este tipo) pone de manifiesto el papel desempeñado en las cons-

trucciones de Euclides por la noción de un punto (o recta) situado «entre» otros dos, noción sin embargo no definida ([*124*a], t. VIII, p. 222). Finalmente, el empleo de los desplazamientos —sobre todo en los «casos de igualdad de triángulos»— admitido durante mucho tiempo como evidente[28], apareció ante la crítica del siglo XIX como fundamentado en axiomas no formulados. Se llegó así a la realización, desde 1860 hasta 1885, de diversas revisiones parciales de los principios de la geometría (Helmholtz, Méray, Houël) intentando llenar estas lagunas, pero el abandono de todo uso de la intuición no se convierte hasta M. Pasch [*245*] en un programa claramente formulado y desarrollado con todo rigor. El éxito de su empresa produjo numerosos imitadores que, principalmente entre 1890 y 1910, presentaron en formas muy variadas los axiomas de la geometría euclídea. Entre estas obras, las más célebres fueron las de Peano, escrita en su lenguaje simbólico [*246* d] y sobre todo los «Grundlagen der Geometrie» («Fundamentos de la Geometría») [*163* c] de Hilbert, aparecidos en 1899, libro que debía convertirse con toda justicia, por la claridad y profundidad de su exposición, en el modelo de la axiomática moderna, hasta el punto de hacer olvidar a sus antecesores. En efecto, no contento con dar un sistema completo de axiomas para la geometría euclídea, Hilbert clasifica estos axiomas en distintos grupos de naturaleza diferente, y se ocupa de determinar el alcance exacto de cada uno de estos grupos de axiomas, no conformándose con desarrollar separadamente las consecuencias lógicas de cada uno de ellos, sino también discutiendo las distintas «geometrías» obtenidas suprimiendo o modificando algunos de estos axiomas (geometrías de las que las de Lobatschevski y Riemann aparecen como casos particulares)[29], poniendo de esta forma de manifiesto, en un dominio considerado hasta entonces como uno de los más cercanos a la realidad sensible, la libertad de que goza el matemático en la elección de sus postulados. A pesar de las desazones causadas en más de un filósofo por estas «metageometrías» de extrañas propiedades, la tesis de los «Grundlagen» fue rápidamente aceptada por los matemáticos de modo casi unánime; H. Poinciaré, bien poco sospechoso de parcialidad a favor del formalismo, reconocía en 1902 que los axiomas de la geometría son convenciones, para las que la noción habitual de «verdad» carece de sentido ([*251* c], pp. 66-67). De esta forma, la «verdad matemática» residiría únicamente en la deducción lógica a partir de premisas fijadas arbitrariamente por los axiomas. Como veremos más adelante (p. 58-62), la validez de las reglas de razonamiento según las cuales se realizan estas deducciones sería muy pronto puesta también en cuestión, lo que llevaría a una reestructuración de los conceptos básicos de las matemáticas.

[28] Hay sin embargo que señalar que ya en el siglo XVI un comentador de Euclides, J. Peletier, protesta contra este medio de demostración en términos próximos a los de los críticos modernos ([*153* e], t. I, p. 249).

[29] Lo que parece haber resultado más sorprendente para los contemporáneos es la geometría «no arquimediana», es decir, aquella geometría que tiene como cuerpo de base un cuerpo ordenado no arquimediano (conmutativo o no) que (en el caso conmutativo) había sido introducido algunos años antes por Veronese [*318*].

Objetos, modelos, estructuras

A) *Objetos y estructuras matemáticas.*— Desde la Antigüedad hasta el siglo XIX se está de acuerdo acerca de cuáles son los objetos principales del matemático; son los mismos que Platón menciona en el pasaje citado anteriormente (p. 27): los números, las magnitudes y las figuras. Si, en un principio, era necesario añadir los objetos y fenómenos de los que se ocupaban la Mecánica, la Astronomía, la Optica y la Música, en los griegos estas disciplinas «matemáticas» están claramente separadas de la Aritmética y la Geometría, y, después del Renacimiento, acceden pronto al rango de ciencias independientes.

Cualesquiera que sean los matices filosóficos con que se adorne la concepción de los objetos matemáticos en tal o cual matemático o filósofo, existe unanimidad al menos en un punto: en el de que estos objetos nos son *dados* y no tenemos el poder de atribuirles propiedades arbitrarias, del mismo modo que un físico no puede cambiar un fenómeno natural. Hay que decir que estos puntos de vista están sin duda parcialmente motivados por reacciones de orden psicológico, en las que no tenemos por qué profundizar, pero que conoce bien todo matemático que se ha esforzado en conseguir una demostración que parecía escapársele continuamente. De aquí a asimilar esta resistencia a los obstáculos que nos opone el mundo

exterior no hay más que un paso; incluso hoy día más de uno que alardea de un formalismo intransigente suscribiría gustoso en su interior esta confesión de Hermite: «*Creo que los números y las funciones del Análisis no son un producto arbitrario de nuestro espíritu; pienso que existen fuera de nosotros, con el mismo carácter necesario que las cosas de la realidad objetiva, y nosotros los encontramos, los descubrimos y los estudiamos, igual que los físicos, los químicos y los zoólogos*» ([*160*], t. II, p. 398).

No es cosa de apartarse, dentro de la concepción clásica de las matemáticas, del estudio de los números y de las figuras; pero esta doctrina oficial, a la que todo matemático se creía obligado a adherirse verbalmente, no dejaba de convertirse poco a poco, a medida que iban acumulándose las nuevas ideas, en una molestia intolerable. Las dificultades de los algebristas respecto a los números negativos no desaparecieron hasta que la Geometría analítica dio una «interpretación» cómoda de ellos, pero todavía en pleno siglo XVIII, d'Alembert, discutiendo el problema en la *Enciclopedia* [*75* a], artículo NÉGATIF), después de una columna de explicaciones bastante confusas se lía la manta a la cabeza y termina diciendo que «*las reglas de las operaciones algebraicas con cantidades negativas se admiten en general por todo el mundo y se aceptan como exactas, cualquiera que sea la idea que se tenga sobre estas cantidades*». El escándalo es todavía mayor con los números imaginarios, ya que si se trata de raíces «imposibles» y si (hasta cerca de 1800) no se encuentra ninguna forma de «interpretarlos», ¿cómo es posible hablar sin contradicción de estos entes imposibles de definir, y, lo que es más, para qué introducirlos? Aquí d'Alembert guarda un prudente silencio y ni siquiera se plantea el problema, sin duda por reconocer que no podría darle otra respuesta que la cándida de A. Girard, un siglo antes [*129*], f. 22): «*Podríamos preguntarnos: ¿para qué sirven estas soluciones imposibles? Yo contesto: para tres cosas: para que siga valiendo la regla general, porque no hay otras soluciones y por su utilidad*».

En el siglo XVII, la situación del Análisis no es mucho mejor. Una circunstancia afortunada fue la aparición en el momento justo de la Geometría analítica para dar una «representación» en forma de figura geométrica de la noción de función, la gran creación del siglo XVII, y contribuir poderosamente (en Fermat, Pascal, o Barrow) al nacimiento del Cálculo infinitesimal (cf. p. 266). Pero también sabemos por otra parte a qué controversias matemático-filosóficas habían de dar lugar las nociones de infinitamente pequeño y de indivisible. Y si bien d'Alembert está aquí más afortunado y reconoce que en el interior de la «metafísica» del Cálculo infinitesimal no hay otra cosa que la noción de límite ([*75* a], artículos DIFFÉRENTIEL y LIMITE, y [*75* b]), no es capaz, como ninguno de sus contemporáneos, de comprender el verdadero sentido de los desarrollos en serie divergente, y de explicar la paradoja de resultados ciertos que han sido obtenidos después de una serie de cálculos efectuados con expresiones carentes de toda interpretación numérica. Por último, hasta en el dominio de la «verdad geométrica», el «marco» euclídeo salta en pedazos cuando Stirling, en 1717, no duda en hablar de una cierta curva que posee un «punto doble imaginario en el infinito» ([*299*], p. 93 de la ed. nueva); sería necesario un duro trabajo para poner en relación un «objeto» de esta clase con las nociones usuales; y Poncelet, que a principios del siglo XIX desarrolló considerablemente estas ideas fundando la geometría proyectiva (véase p. 181) se limita a invocar como justificación un «principio de continuidad» totalmente metafísico.

Se comprende cómo, en estas condiciones (y en el momento mismo en el que, paradójicamente, se proclama con más fuerza la «verdad absoluta» de las matemáticas, la noción de demostración parece difuminarse cada vez más a lo largo del siglo XVIII; estamos lejos de ser capaces de fijar, al igual que los griegos, las nociones sobre las que razonamos, y sus propiedades fundamentales. La vuelta al rigor que aparece a principios del siglo XIX contribuye a mejorar ligeramente este estado de cosas, pero no por ello dejan de surgir nociones nuevas: vemos así cómo aparecen en el Algebra los imaginarios de Galois ([*123*], p. 15-23) y los números ideales de Kummer ([*188* b]), a los que siguen los vectores y cuaterniones, los espacios de *n* dimensiones, los multivectores y los tensores (véase pp. 90-99), sin hablar del álgebra de Boole. Uno de los grandes progresos (que permitiría la vuelta al rigor sin renunciar a ninguna de las conquistas de las épocas anteriores) fue sin duda alguna la posibilidad de dar «modelos» de estas nociones nuevas en términos más clásicos: los números ideales o los imaginarios de Galois se interpretan mediante la teoría de las congruencias (véase pp. 117-129);

la geometría de n dimensiones no aparece (si se quiere) más que como un simple lenguaje para expresar los resultados del álgebra «de n variables»; en cuanto a los números imaginarios clásicos —cuya representación geométrica mediante los puntos de un plano (véase pp. 219-221) señala el comienzo de esta extensión del Algebra— se puede elegir muy poco después entre este «modelo» geométrico y una interpretación en términos de congruencias (cf. p. 116). Finalmente los matemáticos empiezan a darse cuenta de que sus trabajos les llevan a ir contra la corriente «natural», y que debe considerarse legítimo en matemáticas razonar acerca de objetos que no posean ninguna «interpretación» sensible: «*No forma parte de la esencia de la matemática* —dice Boole en 1854[30]— *el ocuparse de las ideas de número y de cantidad*» ([*29*], t. II, p. 13). La misma preocupación lleva a Grassmann, en su *Ausdehnungslehre* («Teoría de la extensión») de 1844 a dar de su cálculo una presentación en la que las nociones de número o de ente geométrico son excluidas desde el principio[31]. Y, un poco después, Riemann, en su Lección

[30] También aquí aparece Leibniz como un precursor: «*la Matemática universal* —dice— *es, por así decirlo, la Lógica de la imaginación*», y debe ocuparse «*de todo aquello que, en el dominio de la imaginación, es susceptible de determinación exacta*» ([*198* c], p. 348; cf. [*69* a], pp. 290-291); para él la pieza clave de la Matemática así concebida es lo que llama la «Combinatoria» o «Arte de las fórmulas», entendiendo Leibniz esencialmente por tal la ciencia de las relaciones abstractas entre los objetos matemáticos. Pero mientras que hasta entonces las relaciones consideradas en matemáticas eran casi exclusivamente relaciones de magnitud (igualdad, desigualdad, proporción), Leibniz concibe otros muchos tipos de relaciones que, en su opinión, deberían ser estudiadas sistemáticamente por los matemáticos, como la relación de inclusión o lo que él llama la relación de «determinación» unívoca o plurívoca (es decir, las nociones de aplicación y de correspondencia) ([*69* a], pp. 307-310). Con este motivo surgen de su pluma otras muchas ideas modernas: señala que las distintas relaciones de equivalencia de la geometría clásica tienen en común las propiedades de simetría y transitividad, y concibe también la noción de relación compatible con una relación de equivalencia, señalando expresamente que una relación cualquiera no posee necesariamente dicha propiedad ([*69* a], pp. 313-315). Por supuesto que preconiza aquí como en todas partes el empleo de un lenguaje formalizado, e incluso introduce un signo destinado a designar una relación indeterminada ([*69* a], p. 301).

[31] Hay que reconocer que su lenguaje, con un aire demasiado filosófico, no era el más adecuado para seducir a la mayoría de los matemáticos, que se sienten muy incómodos ante fórmulas tales como la siguiente: «*La Matemática pura es la ciencia del ente particular en tanto que nacido en el pensamiento*» (Die Wissenschaft des *besonderen* Seins als eines durch das Denken *gewordenen*). Pero el contexto hace ver

inaugural, tiene al principio la precaución de no hablar de «puntos» sino de «determinaciones» (Bestimmungsweise) en su descripción de las «multiplicidades extendidas n veces», y subraya que en tales multiplicidades las «relaciones métricas» (Massverhältnisse) «*no pueden estudiarse más que mediante magnitudes abstractas y no pueden representarse más que por medio de fórmulas*; *sin embargo, bajo ciertas condiciones, pueden descomponerse en relaciones cada una de las cuales por separado es susceptible de una representación geométrica, y de esta forma los resultados del cálculo pueden ser expresados en forma geométrica*» ([*259* a], p. 276).

A partir de este momento la ampliación del método axiomático puede considerarse como realizada. Si bien se considera todavía útil durante cierto tiempo el control de los resultados «abstractos» por medio de la intuición geométrica, es ya admitido el hecho de que los objetos «clásicos» no son los únicos que el matemático puede estudiar legítimamente. Esto se debe a que, a causa precisamente de las múltiples «interpretaciones» o «modelos» posibles, se ha reconocido que la «naturaleza» de los objetos matemáticos es en el fondo secundaria, y que es poco importante, por ejemplo, presentar un resultado como un teorema de geometría «pura» o bien como un teorema de álgebra a través de la geometría analítica. Dicho de otro modo, la esencia de las matemáticas —esa noción huidiza que no había podido expresarse hasta entonces sino mediante denominaciones vagas tales como «regla general» o «metafísica»— aparece como el estudio de las relaciones entre objetos que no son (deliberadamente) conocidos y descritos más que por *algunas* de sus propiedades, precisamente aquellas que se toman como axiomas de partida de su teoría. Boole ya había visto claramente esto cuando escribía en 1847 que la matemática trata «*acerca de las operaciones consideradas en sí mismas, independientemente de los distintos objetos a los que puedan aplicarse*» ([*29*], t. I, p. 3). Hankel, comenzando en 1867 la axiomatización del álgebra, defiende una matemática

que Grassmann entendía por esto de forma bastante clara la matemática axiomática en el sentido moderno (salvo en que sigue bastante curiosamente a Leibniz al considerar que las bases de esta «ciencia formal», como dice, son las definiciones y no los axiomas); en cualquier caso, insiste, al igual que Boole, en el hecho de que «*el nombre de ciencia de las magnitudes no conviene al conjunto de las matemáticas*» ([*134*], t. I_1, pp. 22-23).

«puramente intelectual, una pura teoría de las formas, que tiene como fin, no la combinación de las magnitudes, ni la de sus imágenes, sino la de los objetos del pensamiento («Gedankendinge»), *a los que pueden corresponder objetos o relaciones efectivas, aunque dicha correspondencia no es necesaria»* ([*146*], p. 10). Cantor, en 1883, se hacía eco de esta reivindicación de una «matemática libre» proclamando que *«la matemática es enteramente libre en su desarrollo, y basta con que sus conceptos no sean contradictorios y estén coordinados con los conceptos introducidos anteriormente por medio de definiciones precisas»* ([*47*], p. 182). Finalmente, la revisión de la geometría euclídea acabó de extender y popularizar estas ideas. El mismo Pasch, todavía ligado sin embargo a una cierta «realidad» de los entes geométricos, reconocía que la geometría era de hecho independiente de su significación, y que no consistía más que en el estudio de sus relaciones ([*245*], p. 90). Hilbert llevó esta concepción a sus últimas consecuencias lógicas al subrayar que los nombres de las primeras nociones de una teoría son elegidos arbitrariamente[32], en tanto que Poincaré la expresaba diciendo que los axiomas son «definiciones disfrazadas», volviendo del revés el punto de vista escolástico.

Sentiríamos así la tentación de decir que la noción moderna de «estructura» se adquiere, al menos en lo esencial, hacia 1900; en realidad será preciso esperar todavía treinta años para que aparezca con toda claridad. No es sin duda difícil reconocer estructuras de la misma especie cuando son de naturaleza lo bastante sencilla, por ejemplo, para la estructura de grupo, esto se lleva a cabo hacia mediados del siglo XIX. Pero en el mismo momento estamos viendo a Hankel luchar para, sin conseguirlo del todo, llegar a las ideas generales de cuerpo y de extensión, que solamente consigue expresar en la forma de un «principio de permanencia» casi metafísico ([*146*]), y que no serán formuladas de modo definitivo más que cuarenta años después por Steinitz ([*294* a]. En lo referente a esto, ha sido

[32] Según una célebre anécdota, Hilbert gustaba de expresar esta idea diciendo que se pondían remplazar las palabras «punto», «recta» y «plano» por «mesa», «silla» y «jarra de cerveza» sin cambiar en nada la geometría. Es curioso encontrar ya en d'Alembert una anticipación de esta ocurrencia: *«Se puede dar a las palabras los sentidos que se quiera»* escribe en la *Enciclopedia* ([*75* a], artículo DEFINITION) *«se podrían hacer en rigor elementos de Geometría exactos (pero ridículos) llamando triángulo a lo que se llama ordinariamente círculo»*.

sobre todo difícil conseguir librarse de la impresión de que los objetos matemáticos nos son «dados» *con su estructura*, ha sido necesaria una larga práctica del Análisis funcional para hacer familiar a los matemáticos modernos la idea de que, por ejemplo, existen varias topologías «naturales» para los números racionales, y varias medidas sobre la recta real. Con esta disociación se pasa finalmente a la definición general de las estructuras.

B) *Modelos e isomorfismos*.— Se habrá notado la aparición en varias ocasiones de la noción de «modelo» o de «interpretación» de una teoría matemática por medio de otra. No se trata de una idea reciente, y sin duda puede verse en ella una manifestación permanente del sentimiento profundo de la unidad de las distintas «ciencias matemáticas». La tradicional máxima «*Todas las cosas son números*» de los primeros pitagóricos, si la aceptamos como auténtica, puede considerarse como un resto de una primera tentativa de reducir el álgebra y la geometría de la época a la aritmética. Aunque el descubrimiento de los irracionales pareciese cerrar este camino para siempre, la reacción que provocó en las matemáticas griegas fue un segundo intento de síntesis, tomando esta vez como base la geometría, y abarcando en ella entre otros los métodos de resolución de ecuaciones algebraicas heredados de los babilonios[33]. Sabemos que esta concepción sobrevivió hasta la reforma fundamental de R. Bombelli y Descartes, reduciendo toda medida de una magnitud a una medida de longitud (dicho de otro modo, a un número real, véase p. 208). Pero, con la creación de la geometría analítica por Fermat y Descartes, vuelve a recorrerse el camino en sentido opuesto, y se lleva a cabo una unión mucho más estrecha del álgebra y de la geometría, pero esta vez en provecho del álgebra. Además, y a consecuencia de lo anterior, Descartes va más lejos y concibe la unidad esencial *«de todas las ciencias que se denominan corrientemente Matemáticas... Aunque sus objetos sean diferentes*, dice, *no por ello dejan de acordarse en tanto que no tienen en cuenta otra*

[33] La aritmética queda sin embargo fuera de esta síntesis, y sabemos que Euclides, después de haber desarrollado la teoría general de proporciones entre magnitudes cualesquiera, desarrolla independientemente la teoría de los números racionales en vez de considerarlos como casos particulares de las razones de magnitudes (véase pp. 203-205).

cosa que las relaciones o proporciones que se encuentran en ellas» ([*85* a], t. VI, p. 19-20)[34]. Sin embargo, este punto de vista tendía solamente a convertir el Algebra en la ciencia matemática fundamental, conclusión contra la que Leibniz protesta vigorosamente; él mismo había concebido, como hemos podido ver, una «Matemática universal», pero en un plano mucho más elevado, próximo ya a las ideas modernas. Precisando el «acuerdo» de que hablaba Descartes, parece entrever, por vez primera, la noción general de isomorfismo (que él llama «semejanza») y la posibilidad de «identificar» relaciones u operaciones isomorfas, dando como ejemplo de ello el de la suma y la multiplicación ([*69* a], p. 301-303). Pero estas ideas audaces no tuvieron ningún eco entre sus contemporáneos, y hay que esperar hasta el gran desarrollo del Algebra de mediados del siglo XIX (véase pp. 79-81) para ver el comienzo de la realización de los sueños leibnizianos. Ya hemos subrayado que es precisamente en este momento cuando los «modelos» se multiplican y se acostumbra pasar de una teoría a otra mediante un simple cambio de lenguaje; el ejemplo más claro es seguramente el de la dualidad en geometría proyectiva (véase p. 183), donde la costumbre, muy frecuente en la época, de escribir en columnas contiguas los teoremas «duales», tuvo mucho que ver con la toma de conciencia de la noción de isomorfía. Desde un punto de vista más técnico, es cierto que la noción de grupos isomorfos es conocida por Gauss para los grupos abelianos, y por Galois para los grupos de permutaciones (cf. pp. 79-81), no adquiriéndose para grupos cualesquiera hasta mediados del siglo XIX[35]. Como consecuencia de ello, a continuación se tiende a definir para cada nueva teoría

[34] Resulta bastante curioso con este motivo el ver cómo Descartes relaciona la aritmética y las «*combinaciones de números*» con las «*artes en las que predomina el orden, como lo son aquellas en las que los artesanos hacen telas o tapices, o las de las mujeres que bordan o hacen encajes*» ([*85* a], t. X, p. 403), a modo de anticipación de los estudios modernos sobre la simetría y sus relaciones con la noción de grupo (cf. [*331* c]).

[35] La misma palabra de «isomorfismo» es introducida en la teoría de grupos hacia la misma época, pero al principio servía para designar también los homomorfismos suprayectivos, llamados «isomorfismos meriédricos», mientras que los isomorfismos propiamente dichos eran llamados «isomorfismos holoédricos»; esta terminología continuará empleándose hasta los trabajos de E. Noether.

axiomática una noción de isomorfismo, pero hasta la aparición de la noción moderna de estructura no se llega a reconocer que toda estructura lleva incorporada una noción de isomorfismo, y que no es necesario dar una definición particular para cada tipo de estructura.

C) *La aritmetización de las matemáticas clásicas.*—El empleo, cada vez más extendido, de la noción de «modelo», permitiría también al siglo XIX llevar a cabo la unificación de las matemáticas soñada por los pitagóricos. A principios del siglo, los números enteros y las magnitudes continuas parecían tan incompatibles como en la antigüedad; los números reales continuaban estando ligados a la noción de magnitud geométrica (o al menos a la de longitud), a la que se había recurrido para obtener «modelos» de los números negativos e imaginarios. Incluso los números racionales estaban tradicionalmente relacionados con la idea de la «división» de una magnitud en partes iguales; solo quedaban aparte los enteros, como «*productos exclusivos de nuestro espíritu*», tal como decía Gauss en 1832, oponiéndolos a la noción de espacio ([*124*a], t. VIII, p. 201). Los primeros esfuerzos para aproximar la Aritmética y el Análisis se refirieron a los números racionales (positivos y negativos), y fueron debidos a Martin Ohm (1822), siendo continuados hacia 1860 por varios autores, fundamentalmente Grassmann, Hankel y Weierstrass (en sus cursos no publicados); a este último parece deberse la idea de obtener un «modelo» de los números racionales positivos y de los enteros negativos considerando clases de pares de números naturales. Pero faltaba realizar la tarea más importante, la de obtener un «modelo» de los números irracionales dentro de la teoría de los números racionales; hacia 1870 la solución de este problema era realmente urgente, a la vista de la necesidad, surgida después de la aparición de fenómenos «patológicos» en Análisis, de prescindir del uso de cualquier intuición geométrica y de la noción vaga de «magnitud» para definir los números reales. Como sabemos, este problema fue resuelto en esta época, y casi simultáneamente, por Cantor, Dedekind, Méray y Weierstrass, siguiendo métodos bastante diferentes (véase p. 214).

A partir de este momento, los enteros pasan a ser el fundamento de todas las matemáticas clásicas. Además, los «modelos» basados en la Aritmética van adquiriendo cada vez más importancia con la

extensión del método axiomático y la concepción de los objetos matemáticos como creaciones libres del espíritu. Quedaba todavía una restricción a esta libertad reivindicada por Cantor, el problema de la «existencia», que ya había preocupado a los griegos, y que ahora se planteaba de un modo mucho más agobiante, en tanto que se prescindía de toda representación intuitiva. Más adelante veremos (pp. 59-61) de qué maelström filosófico-matemático iba a ser centro la noción de «existencia» en los primeros años del siglo XX. Pero durante el siglo XIX no se llegó a este punto, y demostrar la existencia de un objeto matemático poseyendo ciertas propiedades consistía simplemente, como para Euclides, en «construir» un objeto con las propiedades citadas. Precisamente para esta finalidad eran útiles los «modelos» aritméticos, una vez «interpretados» los números reales en términos de números enteros, se interpretaban igualmente los números complejos y la geometría euclídea, gracias a la Geometría analítica, y lo mismo sucedía con todos los nuevos entes algebraicos introducidos desde principios de siglo; por último —descubrimiento que alcanzó una gran resonancia— Beltrami y Klein habían obtenido «modelos» euclídeos de las geometrías no euclídeas de Lobatschevski y Riemann (véase p. 185), por tanto habían «aritmetizado» (y con ello justificado por completo) estas teorías que en un principio habían suscitado tanta desconfianza.

D) *La axiomatización de la aritmética.*—Encajaba perfectamente en la línea de esta evolución el volverse hacia los fundamentos de la misma aritmética, y esto es lo que sucedió hacia 1880. No parece que antes del siglo XIX se hubiese intentado definir la adición y la multiplicación de números naturales de otro modo que recurriendo a la intuición; Leibniz es el único que, fiel a sus principios, señala explícitamente que «verdades» tan «evidentes» como $2 + 2 = 4$ son igualmente susceptibles de demostración si se tiene en cuenta las definiciones de los números que aparecen en ellas ([*198* b], t. IV, p. 403; cf. [*69* a], p. 203), y no consideraba en modo alguno como evidentes por sí mismas la conmutatividad de la adición y de la multiplicación[36]. Pero no lleva más lejos sus reflexiones sobre

[36] Como ejemplos de operaciones no conmutativas indica la sustracción, la división y la exponenciación ([*198* b], t. VII, p. 31), incluso por un momento intentó introducir dichas operaciones en su cálculo lógico ([*69* a], p. 353).

este tema y, hasta la mitad del siglo XIX, no se había hecho ningún avance en este sentido; el mismo Weierstrass, cuyos cursos contribuyeron en gran medida a extender el punto de vista «aritmetizante», no pareció nunca sentir la necesidad de una clarificación lógica de la teoría de los enteros. Los primeros pasos en este sentido parecen deberse a Grassmann, el cual, en 1861 ([*134*], t. II_2, p. 295), da una definición de la suma y la multiplicación de enteros, y demuestra sus propiedades fundamentales (conmutatividad, asociatividad, distributividad) empleando únicamente la operación $x \to x + 1$ y el principio de inducción. Este último había sido claramente concebido y empleado por primera vez en el siglo XVII por B. Pascal ([*244*], t. III, p. 456)[37] —aunque en la Antigüedad puedan encontrarse algunas aplicaciones más o menos conscientes de él— y era utilizado habitualmente por los matemáticos desde la segunda mitad del siglo XVII. Pero es solamente en 1888 cuando Dedekind ([*79*], t. III, pp. 359-361) presenta un sistema completo de axiomas para la aritmética, sistema reproducido tres años después por Peano y que lleva ordinariamente su nombre [*246* c], que contenía en particular una formulación precisa del principio de inducción (que todavía Grassmann empleaba sin enunciarlo explícitamente).

Con esta axiomatización parecían haberse alcanzado los fundamentos definitivos de las matemáticas. De hecho, en el mismo instante en el que se formulaban claramente los axiomas de la aritmética, esta última había dejado de ser para muchos matemáticos (empezando por los mismos Dedekind y Peano) la ciencia primordial, en favor de la más reciente de las teorías matemáticas, la teoría de conjuntos; y las controversias que iban a tener lugar acerca de la noción de número entero no pueden separarse de la gran «crisis de fundamentos» de los años 1900-1930.

La teoría de conjuntos

Puede decirse que en todas las épocas los matemáticos y los filósofos han empleado razonamientos de la teoría de conjuntos de modo más o menos consciente, pero en la historia de sus concepciones

[37] Véase también [*45*].

sobre este tema es necesario separar claramente todas las cuestiones relacionadas con la idea de número cardinal (y en particular la noción de infinito) de aquellas en las que solamente intervienen las nociones de pertenencia e inclusión. Estas últimas figuran entre las más intuitivas y no parecen haber dado nunca lugar a controversias; es apoyándose en ellas como más fácilmente puede fundamentarse una teoría del silogismo (como debían mostrar Leibniz y Euler) o axiomas como «el todo es mayor que la parte», sin mencionar lo referente, en geometría, a la intersección de curvas y superficies. Hasta finales del siglo XIX no hay ninguna dificultad en hablar del conjunto (o «clase» según algunos autores) de los objetos que poseen tal o cual propiedad dada[38], y la célebre «definición» dada por Cantor («*Se entiende por conjunto la agrupación en un todo de objetos bien diferenciados de nuestra intuición o de nuestra mente*») ([*47*], p. 282) apenas despertará objeciones en el momento de su publicación[39]. No sucedió precisamente así cuando a la noción de conjunto vinieron a unirse la de número y la de magnitud. El problema de la divisibilidad infinita de la extensión (planteado ya sin duda desde los primeros pitagóricos) debía dar lugar, como sabemos, a dificultades filosóficas considerables: desde los eleáticos hasta Cantor y Bolzano, matemáticos y filósofos fracasarán ante la paradoja de una magnitud finita formada por infinitos puntos «sin medida». Carecería de interés para nosotros el recordar, aunque fuese en forma resumida, las polémicas interminables y apasionadas que suscitó este problema, que constituye un terreno especialmente abonado para las divagaciones metafísicas o teológicas; nos limitaremos únicamente a señalar el punto de vista en el que, desde la Antigüedad, se detienen la mayoría de los matemáticos. Este punto de vista consiste esencialmente en negarse a la discusión, a falta de poder zanjarla de forma irrefutable —actitud que volveremos a encontrar en los formalistas

[38] Más arriba hemos visto que Boole no duda siquiera en introducir en su cálculo lógico el «Universo» 1, conjunto de todos los objetos; no parece que en su época dicha concepción haya sido criticada, aunque haya sido rechazada por Aristóteles, que da una demostración, bastante oscura, intentando probar lo absurdo de ella ([*6*], Met. B, 3, 998 *b*).

[39] Frege parece haber sido uno de los pocos matemáticos contemporáneos que, no sin razón, ha protestado contra la oleada de semejantes «definiciones» ([*117* c], t. I, p. 2).

modernos: de la misma manera que estos últimos se las arreglan para evitar toda aparición de conjuntos «paradójicos» (véase más adelante pp. 52-56), los matemáticos clásicos evitan cuidadosamente introducir en sus razonamientos el «infinito actual» (es decir, conjuntos formados por una infinidad de elementos concebidos como simultáneamente existentes, al menos en la mente), y se conforman con el «infinito potencial», es decir, con la posibilidad de aumentar toda magnitud dada (o de disminuirla, si se trata de una magnitud «continua»)[40]. Si bien este punto de vista implicaba una cierta dosis de hipocresía[41], permitía al menos desarrollar la mayor parte de las matemáticas clásicas (incluyendo la teoría de las proporciones y más tarde el Cálculo infinitesimal)[42]; incluso parecía una excelente protección, sobre todo después de las discusiones suscitadas por los infinitamente pequeños, y se convirtió en un dogma casi universalmente admitido hasta bien entrado el siglo XIX.

Un primer germen de la noción general de equipotencia aparece

[40] Un ejemplo típico de esta concepción es el enunciado de Euclides: «Para toda cantidad dada de números primos, existe uno mayor», que hoy día expresamos diciendo que el conjunto de los números primos es infinito.

[41] Clásicamente, se tiene desde luego derecho a decir que un punto pertenece a una recta, pero sacar de aquí la conclusión de que una recta está «compuesta de puntos» sería violar el tabú del infinito actual, y Aristóteles dedica largos párrafos a justificar esta prohibición. Probablemente para escapar a toda objeción de este género numerosos matemáticos del siglo XIX evitan hablar de conjuntos, razonando sistemáticamente «en comprensión»; Galois, por ejemplo, no habla de cuerpos de números, sino únicamente de las propiedades comunes a todos los elementos de uno de tales cuerpos. Incluso Pasch y Hilbert, en sus presentaciones axiomáticas de la geometría euclídea siguen todavía absteniéndose de decir que las rectas y los planos sean conjuntos de puntos, Peano es el único que emplea libremente el lenguaje de la teoría de conjuntos en geometría elemental.

[42] La razón de este hecho reside sin duda en la circunstancia de que los conjuntos considerados en las matemáticas clásicas pertenecen a un pequeño número de tipos sencillos, y casi todos ellos pueden ser descritos totalmente por un número finito de «parámetros» numéricos, de tal modo que su consideración se reduce en definitiva a un conjunto finito de números (así sucede por ejemplo con las curvas y superficies algebraicas, que durante mucho tiempo han sido las únicas «figuras» de la geometría clásica). Antes de que los progresos del Análisis impusieran en el siglo XIX la consideración de partes arbitrarias de la recta o de $\mathbf{R}^n$, es muy raro encontrar ejemplos que se aparten de los tipos anteriores; por ejemplo, Leibniz, siempre original, considera como «lugar geométrico» el disco cerrado privado de su centro, o (con un curioso presentimiento de la teoría de ideales) considera que en aritmética un entero

en una nota de Galileo ([*122* b], t. VIII, pp. 78-80); Galileo hace notar que la aplicación $n \to n^2$ establece una correspondencia biunívoca entre los enteros naturales y sus cuadrados, y que por consiguiente el axioma «el todo es mayor que la parte» no sería aplicable a los conjuntos infinitos. Pero lejos de iniciar un estudio racional de los conjuntos infinitos, esta nota parece haber servido solamente para aumentar la desconfianza respecto al infinito actual, esta es la conclusión que sacó el mismo Galileo, y Cauchy, en 1833, no hace otra cosa que aprobar su actitud.

Las necesidades del Análisis —en particular el estudio a fondo de las funciones de variables reales, que se desarrolla durante todo el siglo XIX— son el origen de lo que iba a convertirse en la moderna Teoría de conjuntos. Cuando Bolzano, en 1817, demuestra la existencia del extremo inferior de un conjunto acotado inferiormente en **R** ([*27* c]), todavía razona, como la mayoría de sus contemporáneos, «en comprensión», no hablando de un conjunto cualquiera de números reales, sino de una propiedad arbitraria de estos últimos. Pero cuando, treinta años más tarde, redacta sus *Paradoxien des Unendlichen*, («Paradojas del infinito») [*27* b] (publicadas en 1851, tres años después de su muerte) no duda en reivindicar el derecho a la existencia del «infinito actual» y en hablar de conjuntos arbitrarios. En este trabajo define la noción general de equipotencia de dos conjuntos, y demuestra que dos intervalos compactos cualesquiera de **R** son equipotentes; observa también que la diferencia fundamental entre conjuntos finitos e infinitos radica en que un conjunto infinito E es equipotente a un subconjunto distinto de E, pero no da ninguna demostración convincente de esta afirmación. Por otra parte, el tono general de esta obra tiene mucho más de filosófico que de matemático, y, no pudiendo separar de una forma suficientemente clara la noción de potencia de un conjunto de la de magnitud y de la de orden de infinitud, fracasa en sus tentativas de formar conjuntos infinitos de potencias cada vez mayores, y

es «el género» del conjunto de sus múltiplos, y hace notar que el conjunto de los múltiplos de 6 es la intersección del conjunto de los múltiplos de 2 y del conjunto de los múltiplos de 3 ([*198* b], t. VII, p. 292). A partir de principios del siglo XIX los conjuntos de este tipo empiezan a ser familiares en álgebra y en teoría de números, como por ejemplo las clases de formas cuadráticas introducidas por Gauss, o los cuerpos e ideales, definidos por Dedekind antes de la revolución cantoriana.

acaba por intercalar en sus razonamientos una serie de consideraciones sobre las series divergentes totalmente carentes de sentido.

La teoría de conjuntos, en el sentido que le damos hoy día, se debe al genio de G. Cantor. También él parte del Análisis, y sus trabajos sobre las series trigonométricas, inspirados en los de Riemann, le llevan de modo natural, en 1872, a un primer intento de clasificación de los conjuntos «excepcionales» que aparecen en dicha teoría[43] mediante la noción de «conjuntos derivados» sucesivos, que introduce con este fin. Como consecuencia sin duda de estas investigaciones y de su método para definir los números reales, ([*47*], p. 92-97), Cantor comienza a interesarse por los problemas de equipotencia, ya que en 1873 hace notar que el conjunto de los números racionales (o el de los números algebraicos) es numerable; y en su correspondencia con Dedekind, que da comienzo hacia esta fecha ([*48*]), le vemos plantear el problema de la equipotencia entre el conjunto de los enteros y el conjunto de todos los números reales, que resuelve negativamente algunas semanas más tarde. Después, a partir de 1874, se interesa primordialmente por el problema de la dimensión, que le preocupa, e intenta en vano durante tres años demostrar la imposibilidad de una correspondencia biunívoca entre **R** y $\mathbf{R}^n$ ($n > 1$) antes de conseguir él mismo, estupefacto[44], definir una correspondencia de este tipo. Una vez en posesión de estos resultados, tan nuevos como sorprendentes, se consagra por entero a la teoría de conjuntos. En una serie de seis memorias publicadas en los *Mathematische Annalen* entre 1878 y 1884 ataca simultáneamente los problemas de equipotencia, la teoría de los conjuntos totalmente ordenados, las propiedades topológicas de **R** y $\mathbf{R}^n$, y el problema de la medida, y entre sus manos van separándose poco a poco, con una claridad admirable, las nociones que parecían tan indisolublemente unidas en la concepción clásica del «continuo». Ya en 1880 tiene la idea de iterar «transfinitamente» la formación de «conjuntos

[43] Se trata de los conjuntos $E \subset \mathbf{R}$ tales que si una serie trigonométrica $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{nix}$ converge hacia 0 salvo en los puntos de E, se tiene necesariamente $c_n = 0$ para todo n ([*47*], p. 99).

[44] «*Je le vois, mais je ne le crois pas*» escribe a Dedekind ([*48*], p. 34; en francés en el texto).

derivados», idea que solo toma cuerpo dos años después con la introducción de los conjuntos bien ordenados, uno de los descubrimientos más originales de Cantor, que le permite abordar un estudio detallado de los números cardinales y formular el «problema del continuo» [*47*].

Resultaba totalmente imposible que concepciones tan atrevidas, echando abajo una tradición dos veces milenaria, y llevando a resultados tan inesperados y de un aspecto tan paradójico, se aceptasen sin resistencia. De hecho, entre los matemáticos influyentes entonces en Alemania, Weierstrass fue el único en seguir con cierto interés los trabajos de Cantor (que había sido alumno suyo), pero éste hubo de tropezar con la oposición irreductible de Schwarz, y sobre todo de Kronecker[45]. La tensión constante engendrada por la oposición a sus ideas, así como los esfuerzos infructuosos realizados para demostrar la hipótesis del continuo, parecieron ser las causas de los primeros síntomas de una enfermedad nerviosa, cuyos efectos sobre su producción matemática debían hacerse notar[46]. Cantor no volvió a tomar interés por la teoría de conjuntos hasta 1887, y sus últimas publicaciones son de 1895-97; en ellas desarrolla fundamentalmente la teoría de los conjuntos totalmente ordenados y el cálculo con ordinales. También había demostrado en 1890 la desigualdad $\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}$; a pesar de esto el problema del continuo permanecía sin resolverse, y existía en la teoría de los cardinales una laguna todavía más importante, ya que Cantor no había podido establecer la existencia de una relación de buena ordenación entre cardinales cualesquiera. Esta laguna fue cubierta en parte por el teorema de F. Bernstein (1897) demostrando que las relaciones $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ y $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$ implican $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$[47], y sobre todo por el teorema de Zermelo [*342* a] demostrando la existencia en todo conjunto de

[45] Los contemporáneos de Kronecker han hecho frecuentes alusiones a su posición doctrinal sobre los fundamentos de las matemáticas; hay que pensar que Kronecker fue más explícito en los contactos personales que en sus publicaciones (en las que, en lo que se refiere al papel de los enteros naturales, no hace otra cosa que recoger observaciones bastante banales sobre la «aritmetización» hacia 1880) (cf. [*327* b], en particular pp. 14-15).

[46] Sobre este periodo de la vida de Cantor véase [*275* b].

[47] Este teorema ya había sido obtenido por Dedekind en 1887, pero su demostración no fue publicada ([*79*], t. III, p. 447).

una buena ordenación, teorema que ya había sido conjeturado por Cantor en 1883 ([*47*], p. 169).

Sin embargo, Dedekind no había dejado de seguir con interés considerable las investigaciones de Cantor desde sus comienzos, pero, mientras que este concentraba su atención sobre los conjuntos infinitos y su clasificación, Dedekind continuaba sus propias reflexiones sobre la noción de número (que le habían llevado ya a su definición de los números irracionales mediante «cortaduras»). En su opúsculo *Was sind und was sollen die Zahlen* («Qué son y qué deben ser los números»), publicado en 1888, aunque lo esencial del mismo data de 1872-78 ([*79*], t. III, p. 335), muestra cómo la misma noción de entero natural (sobre la que, como hemos visto, había llegado a apoyarse toda la matemática clásica) podía también obtenerse a partir de las nociones fundamentales de la teoría de conjuntos. Al desarrollar (por primera vez sin duda en forma explícita) las propiedades elementales de las aplicaciones cualesquiera de un conjunto en otro (dejadas hasta entonces de lado por Cantor, que se interesaba únicamente por las correspondencias biunívocas), introduce, para toda aplicación del conjunto E en sí mismo, la noción de «cadena» de un elemento $a \in E$ respecto a f, a saber, la intersección de todos los conjuntos $K \subset E$ tales que $a \in K$ y $f(K) \subset K$[48]. Después toma como *definición* de un conjunto infinito E el hecho de que exista una aplicación biunívoca φ de E en E tal que $\varphi(E) \neq E$[49]; si existe además una aplicación φ con la condición anterior y un elemento $a \notin \varphi(E)$ para el que E sea la cadena de a, Dedekind dice que E es «simplemente infinito», hace notar que entonces se satisfacen los «axiomas de Peano» y muestra (antes de Peano) cómo a partir de aquí se obtienen todos los teoremas elementales de la Aritmética. En su exposición falta solamente el axioma del infinito, que Dedekind (siguiendo a Bolzano) cree poder demostrar consi-

[48] En una noción muy parecida se apoya la segunda demostración dada por Zermelo de su teorema [*342* b].

[49] Hemos visto que ya Bolzano había señalado esta caracterización de los conjuntos infinitos, pero su trabajo (muy poco extendido, según parece, entre los medios matemáticos) no era conocido por Dedekind cuando éste escribía «Was sind und was sollen die Zahlen».

derando el «mundo de los pensamientos» humanos («Gedankenwelt») como un conjunto[50].

Por otro lado, Dedekind había sido llevado por sus trabajos en Aritmética, sobre todo por la teoría de ideales, a considerar la noción de conjunto ordenado desde un punto de vista más general que Cantor; mientras que este último se limita exclusivamente a los conjuntos totalmente ordenados[51], Dedekind ataca el caso general y, sobre todo, realiza un estudio profundo de los conjuntos reticulados ([*79*], t. II, pp. 236-271). Estos trabajos no tuvieron una gran audiencia en su momento; aunque sus resultados, encontrados de nuevo más tarde por diversos autores, hayan dado lugar a numerosas publicaciones desde 1935, su importancia histórica ha residido, mucho menos que en las posibilidades de aplicación (muy escasas sin duda) de esta teoría, en el hecho de haber constituido uno de los primeros ejemplos de construcción axiomática cuidada. Por el contrario, los primeros resultados de Cantor sobre los conjuntos numerables o de la potencia del continuo darían lugar rápidamente a numerosas e importantes aplicaciones incluso en las cuestiones

[50] Otro método para definir la noción de entero natural y para establecer sus propiedades fundamentales había sido propuesto por Frege en 1884 [*117* b]. Frege intenta en primer lugar dar a la noción de cardinal un sentido mucho más preciso que Cantor; en esta época éste solamente había dado las definiciones de conjuntos equipotentes y de conjunto teniendo una potencia menor o igual que la de otro, y la definición de «número cardinal» que daría más tarde ([*47*], p. 282) es tan oscura y tan inutilizable como la definición de recta de Euclides. Frege, preocupado siempre por la precisión, tiene la idea de tomar como definición de cardinal de un conjunto A el conjunto de todos los conjuntos equipotentes con A ([*117* b], § 68); después, habiendo definido $\varphi(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} + 1$ para cada cardinal (§ 76), se sitúa en el conjunto C de todos los cardinales, y define la relación «*b* es un φ-sucesor de $\mathfrak{a}$» significando que *b* pertenece a la intersección de todos los conjuntos $X \subset C$ tales que $\varphi(\mathfrak{a}) \in X$ y $\varphi(X) \subset X$ (§ 76). Por último define un entero natural como un φ-sucesor de 0 (§ 83; desde luego todas estas definiciones son expresadas por Frege en su lenguaje de la «lógica de conceptos»). Desgraciadamente esta construcción no resultó correcta, puesto que el conjunto C o el conjunto de los conjuntos equipotentes a un conjunto A es «paradójico» (véase más adelante).

[51] Es curioso señalar que, entre estos últimos, Cantor no quiso jamás admitir la existencia de grupos ordenados «no arquimedianos», ya que introducían la noción de «infinitamente pequeño actual» ([*47*], pp. 156 y 172). Tales relaciones de orden se habían presentado de modo natural en los trabajos de Du Bois-Reymond sobre los órdenes de infinitud (cf. p. 279) y fueron estudiadas de modo sistemático por Veronese [*318*].

más clásicas del Análisis[52] (naturalmente, sin hablar de las partes de la obra de Cantor que inauguraban la Topología general y la teoría de la medida, véase más adelante pp. 196 y 304). Además, ya en los últimos años del siglo XIX comienza a emplearse el principio de inducción transfinita, que se había convertido, sobre todo después del teorema de Zermelo, en un instrumento indispensable en todas las ramas de las matemáticas modernas. En 1922 daba Kuratowski, evitando el empleo de conjuntos bien ordenados ([*189* a], p. 89), una versión generalmente más manejable de este principio; es en esta forma, vuelta a encontrar más adelante por Zorn [*344*] como se usa principalmente hoy día[53].

Así pues, hacia finales del siglo XIX, las concepciones esenciales de Cantor habían ganado la partida[54]. Hemos visto que, en esta misma época, se completa la formalización de las matemáticas y el método axiomático es casi universalmente aceptado. Pero simultáneamente se abría una «crisis de fundamentos» de una violencia considerable, que iba a conmover al mundo matemático durante más de treinta años, y que pareció llegar a poder derribar, no ya todas estas adquisiciones recientes, sino también las partes más clásicas de la Matemática.

Las paradojas de la teoría de conjuntos y la crisis de fundamentos

Los primeros conjuntos «paradójicos» aparecieron en la teoría de los cardinales y ordinales. Burali-Forti hizo ver en 1897 que no puede considerarse la existencia de un conjunto formado por *todos*

[52] Ya en 1874 había señalado Weierstrass, en una carta a Du Bois-Reymond, una aplicación a las funciones de variable real del teorema de Cantor acerca de la posibilidad de colocar los números racionales formando una sucesión ([*329* b], p. 206).

[53] Debido a ésto, el interés que se otorgaba a los ordinales de Cantor ha decaído mucho; además, muchos de los resultados de Cantor y de sus sucesores sobre la aritmética de los ordinales y de los cardinales no numerables han permanecido hasta ahora bastante aislados.

[54] La consagración oficial de la teoría de conjuntos se manifestó ya en el primer Congreso internacional de matemáticos (Zurich, 1897), en el que Hadamard [*141*] y Hurwitz señalaron sus importantes aplicaciones al Análisis. La influencia creciente de Hilbert en esta época contribuyó mucho a extender las ideas de Cantor, sobre todo en Alemania.

los ordinales, ya que dicho conjunto estaría bien ordenado, y por tanto sería isomorfo a uno de sus segmentos distinto del total, lo que es absurdo [*42*][55]. En 1899 Cantor observa, en una carta a Dedekind, que no puede decirse que los ordinales formen un conjunto ni hablar del «conjunto de todos los conjuntos» sin llegar a una contradicción (el conjunto de las partes de este último «conjunto» Ω sería equipotente a una parte de Ω, lo que estaría en contradicción con la desigualdad $\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}$) ([*47*], pp. 444-448). En 1905, finalmente, Russell, analizando la demostración en esta desigualdad, muestra que el mismo razonamiento que se usa para demostrarla demuestra también (sin usar la teoría de los cardinales) que la noción del «conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos» es también contradictoria [*266*][56].

Podría pensarse que tales «antinomias» aparecerían únicamente en regiones periféricas de las matemáticas, caracterizadas por considerar conjuntos de una «magnitud» innaccesible a la intuición, pero pronto otras «paradojas» amenazarían las partes más clásicas de las matemáticas. Berry y Russell ([*266*], t. I, pp. 63-64), simplificando un razonamiento de J. Richards [*258*], señalan que el conjunto de los enteros cuya definición puede expresarse en menos de dieciseis palabras francesas es finito, pero que definir un entero como «el entero más pequeño que no puede definirse en menos de dieciseis palabras francesas» es contradictorio, ya que esta definición consta de quince palabras*.

Aunque este tipo de razonamientos, tan alejados del uso corriente de los matemáticos, les pareciesen a muchos simples juegos de palabras, no por ello dejaban de señalar la necesidad de una revisión de las bases de las matemáticas a fin de eliminar las «paradojas» de esta clase. Pero si bien había unanimidad en cuanto a la urgencia de esta revisión, enseguida surgieron divergencias radicales respecto a la manera de llevarla a cabo. Para un primer grupo de matemáticos, bien fuesen «idealistas» o bien «formalistas»[57], la situación creada por las «paradojas» de la teoría de conjuntos era muy similar a la planteada en geometría por el descubrimiento de las geometrías no euclídeas o el de las curvas «patológicas» (tales como las curvas sin tangente), y debía conducir a una conclusión semejante, pero de tipo mucho más general, a saber, la de que no puede intentar fundamentarse *ninguna* teoría matemática recurriendo a la intuición, bien sea de modo explícito o implícito. Podemos resumir esta opinión con palabras del principal adversario de la escuela formalista: «*El formalista*», dice Brouwer ([*39* a], p. 83), «*sostiene que la razón humana no dispone de imágenes exactas de las líneas rectas o de los números mayores que diez, por ejemplo... Es cierto que a partir de ciertas relaciones entre entidades matemáticas que tomamos como axiomas, deducimos otras relaciones siguiendo reglas fijas, teniendo la convicción de que de esta manera derivamos verdades a partir de otras verdades por medio de un razonamiento lógico...* [Pero] *para el formalista, la exactitud matemática reside solamente en el despliegue de la sucesión de relaciones, y es independiente de la significación que queramos dar a estas relaciones o a las entidades relacionadas por ellas*».

Para el formalista se trata, pues, de dar a la teoría de conjuntos una base axiomática completamente análoga a la de la geometría elemental, donde no hay que ocuparse de a qué «cosas» se llama «conjuntos» ni de qué significa la relación $x \in y$, sino que se enumeran las condiciones impuestas a esta última relación; naturalmente, esto ha de hacerse de tal manera que se pueda abarcar en todo lo posible los resultados de Cantor, teniendo cuidado de hacer imposible la aparición de conjuntos «paradójicos». El primer ejemplo de este tipo de axiomatización fue dado por Zermelo en 1908 [*342* c], la introducción de conjuntos «muy grandes» se evita mediante un «axioma de selección (Aussonderung)», no determinando una propiedad $P(x)$ un conjunto formado por los elementos que poseen

[55] Esta observación había sido hecha ya por Cantor en 1896 (en una carta a Hilbert no publicada).

[56] El razonamiento de Russell está próximo a las paradojas de los antiguos, cuyo prototipo es la célebre del «mentiroso», objeto de innumerables comentarios dentro de la lógica formal clásica: se trata de saber si el hombre que dice «Yo miento» dice o no la verdad al pronunciar estas palabras (cf. [*267*]).

* En efecto, la frase francesa «le plus petit entier qui n'est pas définissable en moins de seize mots français» consta de quince palabras. (*N. del T.*)

[57] Las diferencias entre estas dos escuelas son fundamentalmente de orden filosófico, y aquí no podemos entrar en más detalles sobre este asunto; lo esencial es que están de acuerdo en el terreno propiamente matemático. Por ejemplo, Hadamard, representante típico de los «idealistas», adopta en lo que se refiere a la validez de los razonamientos de la teoría de conjuntos un punto de vista muy cercano al de los formalistas, pero sin expresarlo de una forma axiomática ([*12*], p. 271).

dicha propiedad más que si P(x) implica ya una relación de la forma $x \in A$ [58]. Pero la eliminación de paradojas análogas a la «paradoja de Richard», solamente podía ser llevada a cabo restringiendo el sentido atribuido a la noción de «propiedad»; aquí Zermelo se contenta con describir de una forma muy vaga un tipo de propiedades que llama *«definit»* y con indicar que es necesario limitarse a ellas al aplicar el axioma de selección. Este punto fue precisado por Skolem [*286* a] y Fraenkel [*113* b]; como hacen notar estos autores, su elucidación exige situarse en un sistema totalmente formalizado, en el que las nociones de «propiedad» y de «relación» hayan perdido toda «significación» y pasado a ser simples designaciones de agrupaciones formadas siguiendo reglas explícitas. Para hacer esto es necesario incluir en el sistema las reglas de lógica utilizadas, lo que no era el caso en el sistema de Zermelo-Fraenkel.

Después aparecieron otras axiomatizaciones de la teoría de conjuntos. Citaremos principalmente la de von Neumann [*324* a y c], mucho más cercana a la concepción primitiva de Cantor que a la de Zermelo-Fraenkel; éste (Cantor) había ya propuesto ([*47*], pp. 445-448) en su correspondencia con Dedekind, la distinción de dos tipos de conjuntos, las «multiplicidades» («Vielheiten») y los «conjuntos» («Mengen») propiamente dichos, para evitar los conjuntos paradójicos, caracterizándose los segundos por poder ser pensados como un único objeto. Esta idea es precisada por von Neumann distinguiendo dos tipos de objetos, los «conjuntos» y las «clases»; en su sistema (casi totalmente formalizado) las clases se diferencian de los conjuntos en el hecho de no poder ser colocadas a la izquierda del signo $\in$. Una de las ventajas de este sistema es la de rehabilitar la noción de «clase universal» empleada por los lógicos del siglo XIX (y que, naturalmente, no es un conjunto); debemos señalar también que el sistema de von Neumann evita (para la teoría de conjuntos) la introducción de esquemas de axiomas, que son sustituidos por axiomas convenientes, lo que simplifica el estudio lógico. Bernays y Gödel [*130* b] han dado variantes del sistema de von Neumann.

[58] Por ejemplo, la paradoja de Russell solamente resultaría válida en el sistema de Zermelo si se demostrase la relación $(\exists z)((x \notin x) \Rightarrow (x \in z))$; por supuesto que una demostración de este estilo, si se consiguiese obtener, tendría como consecuencia inmediata la necesidad de una modificación sustancial del sistema en cuestión.

Con los sistemas anteriores parecía haberse conseguido la eliminación de las paradojas, pero a costa de introducir restricciones que no podían dejar de parecer arbitrarias. En honor del sistema de Zermelo-Fraenkel hay que decir que se limita a formular prohibiciones que no hacen otra cosa que sancionar el uso corriente de la noción de conjunto en las aplicaciones a las distintas teorías matemáticas. Los sistemas de von Neumann y Gödel están más alejados de las concepciones usuales, pero no hay que olvidar que en el marco de dichos sistemas, podría resultar más fácil la inserción de algunas teorías matemáticas (todavía en sus comienzos) que en el más estrecho de Zermelo-Fraenkel.

Ciertamente, no podría decirse que ninguna de estas soluciones parezca definitiva. Si satisfacen a los formalistas es porque estos últimos se niegan a tener en cuenta las reacciones psicológicas individuales de cada matemático, consideran que un lenguaje formalizado desempeña su papel cuando es capaz de transcribir los razonamientos matemáticos en una forma desprovista de ambigüedad, y de servir de este modo de vehículo al pensamiento matemático; cada uno será libre después de pensar lo que quiera acerca de la «naturaleza» de los entes matemáticos o de la «verdad» de los teoremas que utilice, con tal que sus razonamientos puedan ser transcritos al lenguaje común [59].

En otras palabras, la actitud de los formalistas, desde el punto de vista filosófico, consiste en desentenderse del problema planteado por las «paradojas», abandonando la posición platónica que pretendía atribuir a las nociones matemáticas un «contenido» intelectual común a todos los matemáticos. Muchos matemáticos retroceden ante esta ruptura con la tradición; Russell, por ejemplo, intenta evitar las paradojas analizando más profundamente su estructura. Recogiendo una idea expresada primeramente por J. Richard (en el artículo [*258*] en que exponía su paradoja) y desarrollada después por H. Poincaré [*251* c], Russell y Whitehead hacen notar que todos

[59] Sin embargo; Hilbert parece haber creído siempre en una «verdad» matemática objetiva ([*163* c], pp. 315 y 323). Incluso algunos formalistas que, como H. Curry, mantienen una postura muy próxima a la que acabamos de resumir, rechazan con indignación la idea de que las matemáticas pudieran ser consideradas como un simple juego, y se empeñan en ver en ellas una «ciencia objetiva» ([*73*], p. 57).

los conjuntos paradójicos violan el principio siguiente, llamado «principio del círculo vicioso»: «Un elemento cuya definición implica la totalidad de los elementos de un conjunto no puede pertenecer a dicho conjunto» ([*266*], t. I, p. 40). Este enunciado sirve también como base a los *Principia*, y para respetarlo se desarrolla en esta obra la «teoría de los tipos». Al igual que la de Frege, en la que está inspirada, la lógica de Russell y Whitehead posee «variables proposicionales», la teoría de los tipos realiza una clasificación de estas variables cuyas líneas maestras son las siguientes: a partir de un «dominio de individuos» no precisados y que pueden denominarse «objetos de orden 0», las relaciones cuyas variables (*libres o ligadas*) son individuos, son denominadas «objetos de primer orden», y, de forma general, las relaciones cuyas variables son objetos de orden $\leq n$ (siendo al menos una de orden n) se llaman «objetos de orden $n + 1$»[60]. Un conjunto de objetos de orden n solamente puede ser definido mediante una relación de orden $n + 1$, y esta condición permite eliminar sin dificultades los conjuntos paradójicos[61]. Pero el principio de la «jerarquía de los tipos» es tan restrictivo que, en el caso de atenerse estrictamente a él, se llegaría a una matemática de una complejidad extraordinaria[62]. Para evitar tales consecuencias, Russell y Whitehead se vieron obligados a introducir un «axioma de reducibilidad» afirmando la existencia, para toda relación entre «individuos», de una relación *de primer orden* equivalente, condición

[60] Esto no es realmente más que el comienzo de la clasificación de los «tipos», de la que no podríamos dar cuenta con fidelidad sin entrar en una serie de largas explicaciones; el lector deseoso de conocer más detalles podrá consultar principalmente la introducción del t. II de los *Principia Mathematica* [*266*].

[61] En el sistema de Russell y Whitehead, la relación $x \in x$ no puede por tanto ser escrita legítimamente, al contrario de lo que sucede en el sistema de Zermelo-Fraenkel, por ejemplo.

[62] Por ejemplo, la igualdad no es una noción primitiva en el sistema de los *Principia*: dos objetos a y b son iguales si para *toda* propiedad $P(x)$, $P(a)$ y $P(b)$ son proposiciones equivalentes. Pero esta definición no tiene sentido dentro de la teoría de los tipos: para dárselo sería necesario especificar al menos el «orden» de P, ¡y habría que distinguir una infinidad de relaciones de igualdad! Además, Zermelo había señalado ya en 1908 [*342* b] que muchas definiciones de las matemáticas clásicas (por ejemplo la de extremo inferior de un conjunto $\mathbf{R}$) no respetan el «principio del círculo vicioso», y que por tanto la adopción de este principio correría el riesgo de poner en entredicho partes importantes de las teorías matemáticas más tradicionales.

no menos arbitraria que los axiomas de los formalistas, y que reduce considerablemente el interés de la construcción de los *Principia*. El sistema de Russell y Whitehead ha tenido más éxito entre los lógicos que entre los matemáticos, y no está, por otra parte, totalmente formalizado[63], lo que da lugar a numerosas obscuridades de detalle. Se han realizado diversos esfuerzos para simplificar y clarificar este sistema (Ramsey, Chwistek, Quine, Rosser); siguiendo la tendencia de emplear lenguajes cada vez más completamente formalizados, estos autores sustituyen las reglas de los *Principia* (que aún poseían un cierto fundamento intuitivo) por restricciones referentes únicamente a la escritura de las agrupaciones de signos consideradas. Estas reglas, no solamente parecían tan gratuitas como las reglas de prohibición formuladas en los sistemas de Zermelo-Fraenkel o de von Neumann, sino que, estando más alejadas del trabajo de los matemáticos, condujeron en muchos casos a consecuencias inaceptables no previstas por sus autores (como la paradoja de Burali-Forti o la negación del axioma de elección).

Para los matemáticos de las escuelas precedentes se trataba fundamentalmente de no renunciar, ni siquiera parcialmente, a la herencia del pasado, como dice Hilbert ([*163*c], p. 274): «*Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor ha creado para nosotros.*» Y para no renunciar están dispuestos a aceptar limitaciones a los razonamientos matemáticos, limitaciones poco esenciales en tanto que conformes al uso, pero que no parecían deducirse de nuestros hábitos mentales y de la intuición de la noción de conjunto. Cualquier cosa les parecía mejor que aceptar la intervención de la psicología en los criterios de validez de las matemáticas, y antes de «*vernos obligados a tener en cuenta las propiedades de nuestros cerebros*», como decía Hadamard ([*12*], p. 270), se resignan a imponer al dominio matemático límites en gran parte arbitrarios, siempre que dejen dentro de ellos la Matemática clásica y no dificulten los progresos ulteriores.

La actitud de los matemáticos ligados a la tendencia que todavía no hemos mencionado es totalmente diferente. Si los formalistas

[63] Russell y Whitehead (como ya había hecho Frege) se mantienen en la posición clásica en lo que a las fórmulas matemáticas se refiere, que para ellos deben poseer siempre un «sentido» que se refiera a una actividad subyacente del pensamiento.

han aceptado la renuncia al control de los «ojos de la mente» en lo que se refiere al razonamiento matemático, los matemáticos que se ha llamado «empiristas», «realistas», o «intuicionistas» se niegan a esta abdicación, necesitan una especie de seguridad interior que les garantice la «existencia» de los objetos matemáticos de que se ocupan. Mientras que solamente se trataba de renunciar a la intuición espacial, el problema no era serio, puesto que los «modelos» aritméticos permitían «parapetarse» detrás de la noción intuitiva de entero. Pero las oposiciones irreducibles aparecieron cuando se trataba de reducir la noción de entero a la de conjunto (mucho menos precisa intuitivamente), y de imponer después al manejo de estos conjuntos restricciones sin fundamento intuitivo. El primero cronológicamente de estos oponentes (y el que debía ejercer mayor influencia por la autoridad de su genio) fue H. Poincaré; habiendo admitido no solamente el punto de vista axiomático en lo referente a la geometría y la aritmetización del Análisis, sino también una buena parte de la teoría de Cantor (que fue uno de los primeros en aplicar con provecho en sus trabajos), se negó, sin embargo, a aceptar que la misma aritmética pudiera ser objeto de un tratamiento axiomático; en particular, el principio de inducción completa le parecía una intuición fundamental de nuestro espíritu, en la que no puede verse una simple convención[64] [*251* c]. Enemigo por principio de los lenguajes formalizados, cuya utilidad negaba, confunde constantemente la noción de entero en las matemáticas formalizadas y el empleo de enteros en la teoría de la demostración, que empezaba a aparecer entonces, y de la que hablaremos más adelante; era, sin duda, difícil en aquélla el apreciar tan claramente como hoy —después de 50 años de estudios y de discusión— esta distinción, distinción que, sin embargo, habían visto con toda claridad un Hilbert o un Russell.

Las críticas de esta naturaleza se multiplicaron después de la introducción del axioma de elección por Zermelo en 1904 [*342* a]. Su empleo en muchas demostraciones anteriores del Análisis o de la

[64] Poincaré llega a decir (sustancialmente) que es imposible definir una estructura que verifique todos los axiomas de Peano, con excepción del principio de inducción completa ([*251* c], p. 65); el ejemplo (debido a Padoa) de los enteros con la aplicación $x \to x + 2$ en vez de $x \to x + 1$ demuestra que dicha afirmación no es exacta. Resulta curioso encontrarla ya en Frege, casi en los mismos términos ([*117* b], página 21 *e*).

teoría de conjuntos, había pasado desapercibido hasta entonces[65]; fue a partir de una idea sugerida por Erhard Schmidt como Zermelo, enunciando este axioma explícitamente, dedujo de un modo muy ingenioso, a partir de él, una demostración satisfactoria de la existencia de una buena ordenación en todo conjunto. Parece que, llegando a la vez que las «paradojas», esta nueva y extraña forma de razonamiento haya sembrado la confusión entre numerosos matemáticos; para ello no hay más que ver los extraños malentendidos surgidos a propósito del tema en el tomo siguiente de los *Mathematische Annalen*, y en la pluma de matemáticos tan familiarizados con los métodos cantorianos como Schoenflies y F. Bernstein. Las críticas de E. Borel, publicadas en este mismo volumen, son mucho más sustanciales y están claramente relacionadas con el punto de vista expresado por H. Poincaré sobre los enteros; dichas críticas son desarrolladas y discutidas en un intercambio de correspondencia entre E. Borel, Baire, Hadamard y Lebesgue, que se ha convertido en un clásico dentro de la tradición matemática francesa [*12*]. Borel empieza por negar la validez del axioma de elección en tanto que, en general, supone una infinidad no numerable de elecciones, lo que es inconcebible para la intuición. Pero Hadamard y Lebesgue señalan que la infinidad numerable de elecciones *arbitrarias* sucesivas no es mucho más intuitiva, puesto que implica infinitas operaciones, que es imposible pensar como realmente efectuadas. Para Lebesgue, que amplía el debate, todo se reduce a saber qué quiere decir que un ente matemático «exista»; para el propio Lebesgue es necesario «nombrar» explícitamente una propiedad que lo defina de modo único (una propiedad «funcional», diríamos nosotros), para una función como la que Zermelo usa en su razonamiento sería lo que Lebesgue llama una «ley» de elección; si esta exigencia no se cumple, continúa, y nos limitamos a «pensar» en esta función en vez de «nombrarla», ¿cómo podemos estar seguros de que a lo largo

[65] En 1890, Peano, al demostrar su teorema sobre la existencia de integrales de las ecuaciones diferenciales, señala que se vería llevado de una manera natural a «*aplicar una infinidad de veces una ley arbitraria mediante la cual se hace corresponder a una clase un individuo de dicha clase*», pero inmediatamente añade que un razonamiento de este tipo le parece inadmisible ([*246* c], p. 210). En 1902, B. Levi había señalado que este mismo razonamiento era empleado implícitamente por F. Bernstein en una demostración en la teoría de los cardinales [*199*].

del razonamiento pensamos siempre en la misma ([*12*], p. 267)? Además, esto sume a Lebesgue en nuevas dudas, la misma elección de un único elemento dentro de un conjunto le plantea dificultades: es necesario estar seguro de que tal elemento «existe», es decir, que al menos uno de los elementos del conjunto pueda ser «nombrado»[66]. ¿Tiene entonces sentido hablar de la «existencia» de un conjunto del que no sabemos «nombrar» todos los elementos? Baire ya no dudaba en negar la existencia del conjunto de las partes de un conjunto infinito dado (*loc. cit.*, pp. 263-264); Hadamard observaba inútilmente que estas exigencias llevaban incluso a renunciar a hablar de los números reales, y E. Borel terminó por coincidir con él. Prescindiendo del hecho de que «lo numerable» parecía haber adquirido derecho de ciudadanía, se había vuelto más o menos a la postura clásica de los adversarios del «infinito actual».

Todas estas objecciones no tenían nada de sistemático, y debían ser Brouwer y su escuela los que emprendiesen un replanteamiento completo de las matemáticas siguiendo principios semejantes, pero mucho más radicales. No vamos aquí a intentar resumir una doctrina tan compleja como el intuicionismo, teoría que participa en tanta medida de la psicología como de las matemáticas, y nos limitaremos a señalar algunas de sus características más destacadas; para más detalles remitiremos a los trabajos del mismo Brouwer [*39* a y b] y a la exposición de Heyting [*162*]. Para Brouwer, la matemática coincidiría con la parte «exacta» de nuestro pensamiento, basada en la intuición primera de la sucesión de los enteros naturales, y que no podría ser traducida a un sistema formal sin sufrir mutilaciones. Además, solamente sería «exacta» en la mente de los matemáticos, y sería utópico esperar lograr un instrumento de comunicación entre

[66] La así llamada «elección» de un elemento en un conjunto no tiene nada que ver de hecho con el axioma de elección, se trata simplemente de una forma de hablar, y siempre que se habla de este modo, no se hace en realidad otra cosa que emplear las reglas lógicas más elementales (en las que no interviene el signo τ). Desde luego, la aplicación de estas reglas a un conjunto A exige haber demostrado que $A \neq \emptyset$, y a este punto se refiere la argumentación de Lebesgue, ya que una demostración de este tipo solamente es válida para él si se ha «nombrado» un elemento de A. Por ejemplo, Lebesgue no considera como válido el razonamiento de Cantor ([*47*], páginas 115-118) para demostrar la existencia de números trascendentes; para él esta existencia está probada solamente por el hecho de que se es posible «nombrar» números trascendentes, tales como los números de Liouville o los números e o π.

ellos que no estuviese sometido a todas las imperfecciones y ambigüedades del lenguaje, a todo lo que puede aspirarse es a despertar en el interlocutor un estado de espíritu favorable mediante descripciones más o menos vagas ([*162*], pp. 11-13). La matemática intuicionista no otorga más importancia a la lógica que al lenguaje; una demostración no es válida en virtud de reglas lógicas fijadas de una vez para siempre, sino en virtud de la «evidencia inmediata» de cada uno de sus eslabones. Esta «evidencia» recibe, por otra parte, una interpretación mucho más restrictiva que la de E. Borel y sus partidarios: por ejemplo, no puede decirse en matemática intuicionista que una relación de la forma «R o (no R)» sea verdadera (principio del tercio excluso) salvo que, para todo sistema de valores dado a las variables que aparecen en R, se pueda demostrar que una de las dos proposiciones R o «no R» es verdadera; por ejemplo, a partir de la igualdad $ab = 0$ para números reales, no puede deducirse «$a = 0$ ó $b = 0$», ya que no resulta difícil formar ejemplos explícitos de números reales a y b para los que se tiene $ab = 0$ sin que en el momento actual se sepa demostrar ninguna de las proposiciones $a = 0$, $b = 0$ ([*162*], página 21).

No es sorprendente el hecho de los matemáticos intuicionistas lleguen, partiendo de tales principios, a resultados muy diferentes de los teoremas clásicos. Una parte de estos últimos desaparece, como por ejemplo la mayoría de los teoremas «de existencia» en Análisis (como los teoremas de Bolzano y Weierstrass para las funciones con valores reales); si una función de una variable real «existe» en el sentido intuicionista, es *ipso facto* continua; una sucesión monótona y acotada de números reales no siempre tiene límite. Por otro lado, para el intuicionismo, muchas nociones clásicas se ramifican en nociones fundamentalmente distintas: aparecen dos nociones de convergencia para una sucesión de números reales, y ocho de numerabilidad. No es necesario decir que la inducción transfinita y sus aplicaciones al Análisis moderno son condenadas sin apelación, así como la mayor parte de la teoría de Cantor.

Esta es la única forma, según Brouwer, de que las proposiciones matemáticas puedan tener un «contenido»; aquellos razonamientos formalistas que van más lejos de lo admitido por el intuicionismo se consideran desprovistos de valor, ya que no puede dárseles un «sentido» al que pudiera aplicarse la noción intuitiva de «verdad».

Está claro que juicios de este estilo solamente pueden apoyarse en una idea previa de «verdad» de naturaleza psicológica o metafísica. Dicho de otro modo, están fuera de toda discusión.

Es cierto que los vigorosos ataques procedentes del campo intuicionista hicieron ponerse a la defensiva durante algún tiempo no solamente a las escuelas matemáticas de vanguardia, sino también a los partidarios de la matemática tradicional. Un célebre matemático ha reconocido quedar impresionado por estos ataques hasta el punto de limitar voluntariamente sus trabajos a las ramas de las matemáticas consideradas «seguras». Pero estos casos debieron ser poco frecuentes. La escuela intuicionista, cuyo recuerdo subsistirá únicamente a título de curiosidad histórica, habrá tenido al menos la utilidad de obligar a sus adversarios, es decir, a la inmensa mayoría de los matemáticos, a precisar sus posiciones y a tomar conciencia más claramente de las razones (de orden lógico unas, y sentimentales las otras) de su confianza en las matemáticas.

La metamatemática

La ausencia de contradicción ha sido siempre considerada como una condición *sine qua non* de toda matemática, y, ya en la época de Aristóteles, la Lógica había avanzado lo suficiente como para que se supiera perfectamente que dentro de una teoría contradictoria se puede deducir cualquier resultado. Las pruebas de «existencia», consideradas como indispensables desde la Antigüedad no tenían evidentemente otra finalidad que la de asegurar que la introducción de un nuevo concepto no suponía el riesgo de dar lugar a contradicción, especialmente cuando este concepto era lo bastante complicado como para no caer inmediatamente en el campo de la «intuición». Hemos visto cómo esta exigencia se había hecho mucho más imperiosa con la aparición del punto de vista axiomático en el siglo XIX, y de qué manera la construcción de «modelos» aritméticos era una respuesta a ella. ¿Pero podía ser la misma Aritmética contradictoria? Sin duda, no se hubiera pensado en plantear esta cuestión antes de finales del siglo XIX, de tal modo parecían los números enteros formar parte de lo que hay de más seguro en nuestra intuición, pero después de las «paradojas» todo se había vuelto problemático, y se

comprende muy bien que el sentimiento de inseguridad que ellos mismos habían creado llevase a los matemáticos, hacia 1900, a considerar atentamente el problema de la no contradicción de la Aritmética, queriendo al menos salvar las matemáticas clásicas del naufragio. Este problema es también el segundo de los enunciados por Hilbert en su célebre conferencia en el Congreso Internacional de 1900 ([*163* a], t. III, pp. 229-301). Al hacerlo presentaba un nuevo principio que tendría una gran resonancia: mientras que en la lógica tradicional la no contradicción de un concepto lo hacía solamente «posible», para Hilbert equivale (al menos en lo que se refiere a los conceptos matemáticos definidos axiomáticamente) a la *existencia* de dicho concepto. Esto suponía en apariencia la necesidad de demostrar *a priori* la no contradicción de una teoría matemática, incluso antes de desarrollarla de forma legítima; así lo entendió H. Poincaré que, atacando violentamente al formalismo, toma por su cuenta la idea de Hilbert, subrayando con un maligno placer hasta qué punto los formalistas estaban en aquella época lejos de poder llevarla a cabo ([*251* c], p. 163). Más adelante veremos cómo Hilbert debía aceptar el desafío, pero antes debemos hacer notar aquí, cómo bajo su influencia y la de H. Poincaré, las exigencias planteadas por este último debían ser aceptadas durante largo tiempo, y sin ninguna reserva, tanto por los formalistas como por sus adversarios. Una consecuencia de esto fue la creencia, muy extendida también entre los formalistas, de que la teoría de la demostración de Hilbert formaba parte integrante de la matemática, de la que constituía un preámbulo indispensable. Este dogma no nos parece justificado[67], y consideramos que la intervención de la metamatemática puede y debe reducirse a la parte muy elemental que trata del manejo de los símbolos abreviadores y de los criterios deductivos. No se pretende con esto, contrariamente a lo que decía Poincaré, «reivindicar la libertad de contradicción», sino más bien de considerar, con Hadamard, que la ausencia de contradicción, aunque no se demuestre, se constata ([*12*], p. 270).

Nos falta dar un breve esbozo histórico de los esfuerzos de Hilbert

[67] En pura doctrina formalista, la palabra «existe» no tiene en un texto formalizado más «significación» que las otras, y no hay que considerar ningún otro tipo de «existencia» en las demostraciones formalizadas.

y de su escuela y narrar sumariamente, no solamente la evolución que debía finalmente conducir al resultado negativo de Gödel y justificar *a posteriori* el escepticismo de Hadamard, sino también todos los progresos a que han dado lugar en lo referente al conocimiento del mecanismo de los razonamientos matemáticos, y que hacen de la metamatemática moderna una ciencia independiente de un interés indiscutible.

A partir de 1904, en una conferencia en el Congreso Internacional ([*163* c], pp. 247-261), Hilbert se plantea el problema de la no contradicción de la aritmética. Empieza por constatar la imposibilidad de demostrarla recurriendo a un modelo[68], e indica a grandes rasgos la base de otro método: propone la consideración de las proposiciones verdaderas de la aritmética formalizada como agrupaciones de signos desprovistas de significación, demostrando que mediante el empleo de las reglas que rigen la formación y el encadenamiento de estas agrupaciones de signos no puede nunca obtenerse una que sea una proposición verdadera y cuya negación sea también una proposición verdadera. Incluso llega a bosquejar una demostración de este tipo para un formalismo menos amplio que el de la aritmética, pero, como señala poco después H. Poincaré ([*251* c], p. 185), esta demostración hace uso de manera esencial del principio de inducción, y, por tanto, parece apoyarse en un círculo vicioso. Hilbert no contestó de inmediato a esta crítica, y transcurrieron quince años sin que nadie intentase desarrollar sus ideas; únicamente en 1917 (movido por el deseo de responder a los ataques de los intuicionistas) vuelve a preocuparse por el problema de los fundamentos de las matemáticas, y ya no dejará de ocuparse de él hasta el final de su carrera científica. En sus trabajos sobre el tema, que se van escalonando de 1920 a 1930, y en los que participa activamente toda una escuela de jóvenes matemáticos (Ackermann, Bernays, Herbrand, von Neumann), Hilbert va poco a poco precisando los principios de su «teoría de la demostración»: reconociendo implícitamente lo

[68] Los «modelos» proporcionados por las definiciones de Dedekind o de Frege no harían otra cosa que trasladar el problema, reduciéndolo a la no contradicción de la teoría de conjuntos, problema mucho más difícil sin duda que el de la no contradicción de la Aritmética, y que debía parecerlo todavía mucho más en una época en la que no se había realizado ningún intento serio para evitar las «paradojas».

acertado de la crítica de Poincaré, admite que los razonamientos aritméticos utilizados en metamatemática solamente pueden apoyarse en nuestra intuición de los enteros (y no en la aritmética formalizada), y para conseguirlo le parece esencial el restringir estos razonamientos a «procedimientos finitistas» («finite Prozesse») de un tipo admitido por los intuicionistas: por ejemplo, una demostración por reducción al absurdo no puede probar la existencia metamatemática de una agrupación o de una sucesión de agrupaciones de signos, es necesario indicar una ley de construcción explícita[69]. Por otra parte, Hilbert amplía en dos direcciones su programa inicial, no solo aborda la no contradicción de la aritmética, sino que también intenta demostrar la no contradicción de la teoría de los números reales, e incluso la de la teoría de conjuntos[70]; añade, además, a los problemas de no contradicción los de la independencia de los axiomas, de la completitud, y de la decidibilidad. Vamos a revisar rápidamente estas distintas cuestiones, señalando las diversas investigaciones a que han dado lugar.

Demostrar la *independencia* de un sistema de proposiciones $A_1, A_2, \dots, A_n$ consiste en demostrar que para cada índice i, A_i no es un teorema de la teoría $\mathfrak{T}_i$ que se obtiene tomando como axiomas los A_j de índice $j \neq i$. Esta demostración se habrá logrado si se conoce una teoría no contradictoria $\mathfrak{T}'_i$ en la que sean teoremas los A_j ($j \neq i$), al igual que «no A_i», de este modo podemos considerar el problema desde dos puntos de vista distintos, según aceptemos o no que ciertas teorías (como la aritmética o la teoría de conjuntos) sean no contradictorias. En el segundo caso, se trata de un problema de no contradicción «absoluta». Por el contrario, los problemas del primer tipo se resuelven, como los de no contradicción «relativa» mediante la construcción de «modelos» adecuados, y numerosas demostraciones de este tipo han sido imaginadas mucho antes de que la matemática tomase un aspecto totalmente formalizado: no

[69] Para una descripción detallada y precisa de los procedimientos finitistas permitidos en la metamatemática, se podrá consultar por ejemplo la tesis de J. Herbrand [*158*].

[70] Cuando se habla de la no contradicción de la teoría de los números reales, se supone que ésta está definida axiomáticamente, sin emplear la teoría de conjuntos (o al menos absteniéndose de hacer uso de algunos axiomas de esta última, como el axioma de elección o el axioma del conjunto de las partes).

hay más que recordar los modelos de la geometría no euclídea (ver página 185), y los problemas de independencia de los axiomas de la geometría elemental tratados por Hilbert en sus «Grundlagen der Geometrie» [*163* c], así como los trabajos de Steinitz sobre la axiomatización del Algebra, y los de Hausdorff y sus sucesores sobre la de la Topología.

Se dice que una teoría $\mathcal{T}$ es *completa* si, para toda proposición A de $\mathcal{T}$ que no contenga ninguna letra distinta de las constantes de $\mathcal{T}$, una de las dos proposiciones A o (no A) es un teorema de $\mathcal{T}$ [71]. Dejando aparte algunos formalismos muy rudimentarios, cuya completitud se demuestra fácilmente ([*164*], p. 35), los resultados obtenidos en esta materia son esencialmente negativos, el más importante se debe a K. Gödel [*130* a], que ha demostrado que, si $\mathcal{T}$ es no contradictoria y si los axiomas de la aritmética formalizada son teoremas de $\mathcal{T}$, entonces $\mathcal{T}$ no es completa. La idea fundamental de su ingenioso método consiste en establecer una correspondencia biunívoca (desde luego mediante procedimientos «finitistas») entre los enunciados metamatemáticos y ciertas proposiciones de la aritmética formalizada; aquí nos limitaremos a indicar las grandes líneas [72]. A cada agrupación de signos A que es un término o una relación de $\mathcal{T}$ se empieza por asociarle (mediante un procedimiento de construcción explícito, aplicable casi mecánicamente) un entero $g(A)$ de forma biunívoca. Del mismo modo, a cada demostración D de $\mathcal{T}$ (considerada como una sucesión de agrupaciones de signos) se le puede asociar un entero $h(D)$ de forma biunívoca. Finalmente, se puede dar un procedimiento de construcción explícita de una relación $P(x, y, z)$ de $\mathcal{T}$ [73] tal que, en $\mathcal{T}$, $P(x, y, z)$ implique que x, y, y z sean enteros, y verificando las dos condiciones siguientes:

1.° Si D es una demostración de $A(\lambda)$, donde $A(x)$ es una relación de $\mathcal{T}$, y λ un entero explicitado (es decir, un término de $\mathcal{T}$ que es un entero), entonces $P(\lambda, g(A(x)), h(D))$ es un teorema de $\mathcal{T}$;

[71] Esto se expresa muy a menudo diciendo que si A no es un teorema de $\mathcal{T}$, la teoría $\mathcal{T}'$ obtenida añadiendo A a los axiomas de $\mathcal{T}$ es contradictoria.

[72] Para más detalles, véase [*130* a] o ([*181*], pp. 181-258).

[73] La descripción detallada de $g(A)$, $h(D)$ y $P(x, y, z)$ es muy larga y minuciosa, y la escritura de $P(x, y, z)$ exigiría un número de signos tan grande que es prácticamente imposible, pero ningún matemático piensa que esto reduzca en nada el valor de estas construcciones.

2° Si el entero explicitado μ no es de la forma $h(D)$, o si $\mu = h(D)$ y si D no es una demostración de $A(\lambda)$, entonces (no $P(\lambda, g(A(x)), \mu)$) es un teorema de $\mathcal{T}$.

Sea entonces $S(x)$ la relación (no $(\exists z) P(x, x, z)$), y sea $\gamma = g(S(x))$, que es un término de $\mathcal{T}$. Si $\mathcal{T}$ no es contradictoria no hay *ninguna demostración* de la proposición $S(\gamma)$ en $\mathcal{T}$. En efecto, si D fuera una de esas demostraciones, $P(\gamma, g(S(x)), h(D))$ sería un teorema de $\mathcal{T}$, pero esta relación no es otra cosa que $P(\gamma, \gamma, h(D))$, y, por lo tanto $(\exists z)\, P(\gamma, \gamma, z)$, también sería un teorema de $\mathcal{T}$, y como esta última relación es equivalente a (no $S(\gamma)$), $\mathcal{T}$ sería contradictoria. Por otro lado, lo que acabamos de decir demuestra que para todo entero explicitado μ, (no $P(\gamma, \gamma, \mu)$) es un teorema de $\mathcal{T}$. De aquí resulta que no hay *ninguna demostración*, en $\mathcal{T}$, de (no $S(\gamma)$), ya que esta última relación es equivalente a $(\exists z)\, P(\gamma, \gamma, z)$ y la existencia de un entero μ tal que $P(\gamma, \gamma, \mu)$ implicaría que $\mathcal{T}$ es contradictoria, en virtud de lo anterior [74]. Este teorema metamatemático de Gödel ha sido generalizado posteriormente en distintas direcciones ([*181*], cap. XI) [75].

[74] De hecho, esta última parte del razonamiento supone algo más que la no contradicción de $\mathcal{T}$, a saber, lo que se llama la «ω-no contradicción» de $\mathcal{T}$: esto significa que no existe ninguna relación $R(x)$ en $\mathcal{T}$ tal que $R(x)$ implique $x \in N$ y que, para cada entero *explicitado* μ, $R(\mu)$ sea un teorema de $\mathcal{T}$ y que $(\exists x)(x \in N$ y (no $R(x)$)) sea también un teorema de $\mathcal{T}$. Rosser ha demostrado además que se puede modificar el razonamiento de Gödel de tal modo que solamente se suponga la no contradicción de $\mathcal{T}$ ([*181*], p. 208).

[75] Se observará la analogía del razonamiento de Gödel con el sofisma del mentiroso: la proposición $S(\gamma)$ afirma su propia falsedad cuando se la interpreta en términos metamatemáticos. Se observará también que la proposición

$$(\forall z)((z \in N) \Rightarrow (\text{no } P(\gamma, \gamma, z)))$$

es verdadera intuitivamente, puesto que se tiene una demostración en $\mathcal{T}$ de (no $P(\gamma, \gamma, z)$) para todo entero *explicitado* μ, y, sin embargo, esta proposición no es demostrable en $\mathcal{T}$. Se puede relacionar esta situación con un resultado obtenido anteriormente por Löwenheim y Skolem (véase [*286* a]): este último define metamatemáticamente una relación entre dos *enteros naturales* x, y, que, si se escribe $x \in y$, satisface los axiomas de von Neumann para la teoría de conjuntos. Tenemos por tanto, a primera vista, una nueva «paradoja», puesto que en este «modelo» todos los conjuntos infinitos serían numerables, en contra de la desigualdad de Cantor $m < 2^m$. Pero de hecho la «relación» definida por Skolem no puede ser escrita en la teoría formalizada de conjuntos, ni tampoco el «teorema» que afirma que el conjunto de las partes de un conjunto infinito solo tiene una infinidad numerable de «elementos». En el fondo,

La relación S(γ), acerca de la que acabamos de demostrar que no existe en $\mathfrak{T}$ ninguna demostración ni de ella ni de su negación, ha sido evidentemente fabricada con esta finalidad específica, y no está relacionada de modo natural con ningún problema matemático. Mucho más interesante resulta el hecho de que si $\mathfrak{T}$ designa la teoría de conjuntos (con el sistema de axiomas de von Neumann-Bernays), *ni la hipótesis del continuo ni su negación son demostrables en* $\mathfrak{T}$. Este resultado fundamental ha sido establecido en dos etapas: Gödel demostró en 1940 que la teoría obtenida añadiendo a $\mathfrak{T}$ la hipótesis del continuo $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ no era contradictoria [*130* b], y más tarde, en 1963, P. Cohen demostró que sucede lo mismo si se añade a $\mathfrak{T}$ la relación $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ (ó $2^{\aleph_0} = \aleph_n$ para un entero $n > 1$ cualquiera) [*67*].

El problema de la *decidibilidad* («Entscheidungsproblem») es sin duda el más ambicioso de todos los que se plantea la metamatemática: se trata de saber si, para un lenguaje formalizado dado, puede imaginarse un «procedimiento universal» casi mecánico que, aplicado a cualquier relación del formalismo considerado, nos indique en un número finito de operaciones si dicha relación es verdadera o no lo es[76]. La solución de este problema formaba ya parte, en realidad, de los grandes proyectos de Leibniz, y parece que por un momento la escuela de Hilbert creyó muy próxima su realización. Es evidente que se pueden encontrar procedimientos de este tipo para formalismos que tengan un pequeño número de signos primitivos y de axiomas ([*181*], pp. 136-141). Pero los esfuerzos hechos para precisar el problema de la decidibilidad, fijando con exactitud lo que ha de entenderse por «procedimiento universal», solo han dado lugar hasta ahora a resultados negativos ([*181*], p. 432-439).

esta «paradoja» no es más que una forma más sutil de la observación banal de que no se escribirá nunca más que un número finito de agrupaciones de signos de una teoría formalizada, y que es por tanto absurdo concebir un conjunto no numerable de términos de la teoría, observación muy parecida a la que ya había llevado a la «paradoja de Richard». Razonamientos parecidos prueban que la formalización de la teoría de conjuntos es indispensable si se quiere conservar lo esencial de la concepción cantoriana. Los matemáticos parecen estar también de acuerdo en que no existe más que una concordancia superficial entre nuestras concepciones «intuitivas» de la noción de conjunto y de entero y los formalismos que se supone dan cuenta de ellas, el desacuerdo empieza cuando haya que elegir entre unas y otras.

[76] Una cuestión semejante es la existencia de «algoritmos» para la resolución de ciertos problemas, que no podemos examinar aquí (Turing, Post, P. Novikov).

Además, la solución del problema de la decidibilidad para una teoría $\mathfrak{T}$ permite saber inmediatamente si $\mathfrak{T}$ es o no contradictoria, basta para ello aplicar el «procedimiento universal» a una relación de $\mathfrak{T}$ y a su negación, y vamos a ver que el problema no puede ser resuelto de este modo para las teorías matemáticas usuales[77].

En efecto, en el problema de la no contradicción de las teorías matemáticas —origen y centro de la metamatemática— es donde los resultados han sido más decepcionantes. A lo largo de los años 1920-1930 Hilbert y su escuela habían desarrollado nuevos métodos para abordar estos problemas; después de haber demostrado la no contradicción de formalismos parciales que cubrían una parte de la aritmética (cf. [*158*], [*324* d]), creían estar a punto de lograr su objetivo y de demostrar, no solamente la no contradicción de la aritmética, sino también la de la teoría de conjuntos, cuando Gödel, basándose en la incompletitud de la aritmética, dedujo a partir de ella la imposibilidad de demostrar mediante los «procedimientos finitistas» de Hilbert la no contradicción de toda teoría $\mathfrak{T}$ abarcando la de esta última[78].

Sin embargo el teorema de Gödel no cierra el camino a los intentos de demostración de no contradicción, siempre que se prescinda, al menos en parte, de las restricciones de Hilbert referentes a los «procedimientos finitistas». De este modo llegó Gentzen a

[77] Deberá distinguirse cuidadosamente el problema de la decidibilidad de la creencia, compartida por numerosos matemáticos, y expresada a menudo vigorosamente por Hilbert (en particular), de que para toda proposición matemática, se terminará algún día por saber si es verdadera, si es falsa, o si es indecidible. Esto es un puro acto de fe, cuya crítica escapa a nuestra discusión.

[78] Con las notaciones introducidas más arriba, el resultado de Gödel es el siguiente. Decir que $\mathfrak{T}$ no es contradictoria significa que no existe ninguna demostracción, en $\mathfrak{T}$, de la relación $0 \neq 0$; esto implica por consiguiente, para todo entero explicitado μ, que (no $P(0, g(x \neq x), \mu)$) es un teorema de $\mathfrak{T}$. Consideremos entonces la proposición $(\forall z)$, $(z \in N) \Rightarrow$ no $P(0, g(x \neq x, z))$, que designaremos por C; «traduciendo» a la aritmética formalizada el razonamiento (reproducido más arriba) mediante el cual se demuestra metamatemáticamente que «si $\mathfrak{T}$ es no contradictoria, no hay demostración de S(γ) en $\mathfrak{T}$», se puede establecer que C $\Rightarrow$ (no $(\exists z)(P(\gamma, \gamma, z))$) es un teorema de $\mathfrak{T}$, dicho de otro modo, que C $\Rightarrow$ S(γ) es un teorema de $\mathfrak{T}$. Resulta de aquí que si $\mathfrak{T}$ no es contradictoria, C *no es un teorema de* $\mathfrak{T}$, puesto que en estas condiciones S(γ) no es un teorema de $\mathfrak{T}$. Este es el enunciado exacto del teorema de Gödel.

demostrar en 1936 [127] la no contradicción de la aritmética formalizada, utilizando «intuitivamente» la inducción transfinita hasta el ordinal numerable ε_0 [79]. El valor de «verdad» que puede atribuirse a este razonamiento es sin duda menor que el de los que satisfacen las exigencias iniciales de Hilbert, y es esencialmente una cuestión de psicología personal para cada matemático; no por ello deja de ser cierto que estas «demostraciones» que emplean «intuitivamente» la inducción transfinita hasta un ordinal dado supondrían un progreso importante si se pudieran aplicar, por ejemplo, a la teoría de los números reales o a una parte importante de la teoría de conjuntos.

[79] Gentzen asocia a cada demostración D de la aritmética formalizada un ordinal $\alpha(D) < \varepsilon_0$; por otra parte, describe un procedimiento que, a partir de toda demostración D que de lugar a una contradicción, proporciona una demostración D′ que también da lugar a una contradicción y tal que $\alpha(D') < \alpha(D)$; la teoría de los conjuntos bien ordenados permite concluir la inexistencia de tal demostración D (tipo de razonamiento que extiende el clásico «descenso infinito» de la teoría de números).

NUMERACION. ANALISIS COMBINATORIO

La historia y la arqueología nos han hecho conocer un gran número de «sistemas de numeración»; su finalidad inicial es la de asignar a cada entero individual (hasta un límite que depende de las necesidades prácticas) un nombre y una representación escrita, formados por combinaciones de un reducido número de signos, efectuadas siguiendo leyes más o menos regulares. El procedimiento más frecuente, con mucha diferencia, consiste en descomponer los enteros en sumas de «unidades sucesivas» $b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$, cada una de las cuales es un múltiplo entero de la anterior; si bien en general b_n/b_{n-1} se toma igual a un mismo número b (la «base» del sistema, en general 10), se observan muchas excepciones a esta regla, como en los babilonios, en los que b_n/b_{n-1} es igual bien a 10, bien a 6 [232], y en el sistema cronológico de los mayas, en los que b_n/b_{n-1} es igual a 20 excepto para $n = 2$, siendo $b_2/b_1 = 18$ [228]. En cuanto a la escritura correspondiente, debe indicar el número de «unidades» b_i de cada orden i; en muchos sistemas (como los egipcios, los griegos y los romanos), los múltiplos sucesivos $k \cdot b_i$ (donde k varía de 1 a $(b_{i+1}/b_i) - 1$) son designados por símbolos que dependen simultáneamente de k y de i. Un primer (e importante) progreso consiste en designar todos los números $k \cdot b_i$ (para el mismo valor de k) por el mismo signo: es el principio de la «numeración de posición»,

donde el índice i viene representado por el hecho de que el símbolo correspondiente $k \cdot b_i$ ocupa el lugar i-ésimo en la sucesión de «trozos» que constituyen el número representado. El primer sistema de esta especie es el de los babilonios, que, sin duda, desde el año 2000 a. de J. C. representan con un mismo signo todos los múltiplos $k \cdot 60^{\pm i}$ correspondientes a valores cualesquiera del exponente i ([*232*], pp. 93-109). La desventaja de este sistema reside naturalmente en la ambigüedad de los símbolos empleados, en tanto que no hay nada que indique que pueden faltar las unidades de un cierto orden, o, dicho de otro modo, en tanto que el sistema no se completa introduciendo un «cero». Vemos sin embargo que los babilonios no tuvieron tal signo durante casi toda su historia, solamente emplearon un «cero» en los dos últimos siglos antes de Jesucristo, y únicamente en el interior de un número; hasta aquí, el contexto era lo único que podía precisar la significación del número considerado. Solamente otros dos sistemas utilizan sistemáticamente un «cero»: el de los mayas (que se usa, según parece, desde el principio de la era cristiana [*228*]) y nuestro sistema decimal actual, que nos ha llegado a través de los árabes desde la matemática india, estando comprobado su uso en ella desde los primeros siglos de nuestra Era. Es necesario señalar también que la consideración del cero como un número, y no como un simple signo de separación, y su introducción en los cálculos, deben figurar asimismo entre las contribuciones originales de los indios ([*78*], t. I). Naturalmente, una vez que se había llegado al principio de la numeración de posición, resultaba sencillo el extenderlo a una base cualquiera; la discusión de las virtudes de las distintas «bases» propuestas desde el siglo XVII corresponde a las técnicas del Cálculo numérico, y no será hecha aquí. Limitémonos a señalar que la operación que sirve de fundamento a estos sistemas, la llamada división «euclídea», no aparece antes de los griegos, y se remonta sin duda a los primeros pitagóricos, que hicieron de ella la herramienta fundamental de su aritmética teórica (véase p. 120).

Los problemas generales agrupados bajo el nombre de «Análisis combinatorio» no parecen haber sido considerados antes de los últimos siglos de la Antigüedad clásica, únicamente la fórmula $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ aparece en el siglo III de nuestra Era. El matemático indio Bhaskara (siglo XII) conocía la fórmula general para $\binom{n}{p}$. Un estudio más sistemático se halla en un manuscrito de Leví ben Gerson, a principios del siglo XIII: obtiene la fórmula de recurrencia que permite calcular el número V_n^p de variaciones de n objetos tomados p a p, y en particular el número de permutaciones de n objetos, enunciando también reglas equivalentes a las relaciones $\binom{n}{p} = \frac{V_n^p}{p!}$ y $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$ ([*311*], t. VI, pp. 64-65). Pero este manuscrito no parece haber sido conocido por sus contemporáneos, y los resultados fueron siendo hallados poco a poco por los matemáticos de los siglos siguientes. Entre los progresos posteriores señalemos que Cardano demostró que el número de partes no vacías de un conjunto de n elementos es $2^n - 1$; Pascal y Fermat, fundando el cálculo de probabilidades, vuelven a encontrar la expresión $\binom{n}{p}$, y Pascal es el primero que observa la relación entre estos números y la fórmula del binomio: esta última parece haber sido conocida por los árabes desde el siglo XIII, y por los chinos del XIV, y se había vuelto a encontrar en Occidente a principios del siglo XVI, al igual que el método de cálculo recurrente llamado del «triángulo aritmético», que se atribuye corrientemente a Pascal ([*311*], t. VI, pp. 35-38). Finalmente, Leibniz obtiene hacia 1676, sin publicarla, la fórmula general de los «coeficientes multinomiales», encontrada independientemente y publicada por Moivre veinte años después.

LA EVOLUCION DEL ALGEBRA

Pocas nociones pueden ser consideradas como más primitivas, en Matemáticas, que la de ley de composición: parece inseparable de los primeros rudimentos de cálculo con los enteros naturales y las magnitudes mensurables. Los documentos más antiguos que nos quedan sobre la matemática de los egipcios y de los babilonios nos muestran que estaban ya en posesión de un sistema completo de reglas de cálculo para los enteros naturales > 0, los números racionales > 0, las longitudes, y las áreas, y aunque los textos babilonios que nos han llegado se refieran únicamente a problemas en los que los datos tienen valores numéricos concretos[1] no dan lugar a dudas en cuanto a la generalidad de las reglas empleadas, e indican una habilidad técnica considerable en el manejo de las ecuaciones de primero y segundo grado ([*232*], pp. 179 y ss.). Por otra parte, no se encuentra la menor huella de una preocupación de justificar

[1] No hay que olvidar que hasta Viète no se introduce [*319*] la costumbre de designar por letras todos los elementos (dados o desconocidos) que intervienen en un problema de álgebra. Hasta entonces las únicas ecuaciones resueltas en los tratados de álgebra tenían coeficientes numéricos, cuando el autor enunciaba una regla general para tratar las ecuaciones análogas, lo hace (lo mejor que puede) en lenguaje ordinario; en ausencia de un enunciado explícito de este género, la forma de llevar los cálculos en los casos numéricos tratados hace más o menos verosímil la posesión de tal regla.

las reglas empleadas, y ni siquiera de dar una definición precisa de las operaciones que aparecen, tanto éstas como aquéllas permanecen en el dominio de lo empírico.

Por el contrario, una preocupación de esta clase se manifiesta ya muy claramente en los griegos de la época clásica; es cierto que no se encuentra todavía un tratamiento axiomático de la teoría de los enteros naturales (tratamiento axiomático que no aparecerá hasta finales del siglo XIX, véase p. 42), pero hay numerosos pasajes en los *Elementos* de Euclides en los que se dan demostraciones formales de reglas de cálculo tan «evidentes» intuitivamente como las del cálculo con enteros (por ejemplo, la conmutatividad del producto de dos números racionales). Las demostraciones de esta clase más importantes son las que se refieren a la *teoría de las magnitudes*, la creación más original de la Matemática griega (equivalente, como sabemos, a nuestra teoría de los números reales > 0, véase pp. 205-206); en ella Euclides considera el producto de dos razones de magnitudes, demuestra que es independiente de la forma en que aparezcan estas razones (primer ejemplo de «cociente» de una ley de composición por una relación de equivalencia) y que es conmutativo ([*107*], Libro V, prop. 22-23)[2].

Sin embargo, no hay que ocultar que este progreso hacia el rigor va acompañado en Euclides de un estancamiento, e incluso en algunos puntos de un retroceso, en lo referente a la técnica del cálculo algebraico. El predominio avasallador de la Geometría (para la que está evidentemente concebida la teoría de las magnitudes) paraliza todo desarrollo autónomo de la notación algebraica, los elementos que aparecen en los cálculos deben siempre ser «representados» geométricamente; y, por otra parte, las dos leyes de composición que intervienen no están definidas sobre el mismo conjunto (la suma de dos razones no siempre está definida, y el producto de dos longitudes no es otra longitud sino un área), todo esto origina una complicación que hace casi imposible el manejo de relaciones algebraicas de grado superior al segundo.

[2] Es cierto que Euclides no da en este lugar una definición formal del producto de dos razones, y que la definición que se encuentra un poco más adelante en sus *Elementos* (Libro VI, def. 5) se considera como interpolada: pero no por ello deja de tener Euclides una concepción perfectamente clara de esta operación y de sus propiedades.

Solamente en el declinar de la Matemática griega veremos a Diofanto volver a la tradición de los «logísticos» o calculadores profesionales, que habían continuado aplicando (sin modificar) las reglas heredadas de los egipcios y los babilonios; no complicándose con representaciones geométricas de los «números» que considera, se ve llevado de modo natural a desarrollar las reglas del cálculo algebraico abstracto. Por ejemplo, da reglas que (en lenguaje moderno) equivalen a la fórmula $x^{m+n} = x^m x^n$ para valores pequeños (positivos o negativos) de m y n ([*91* a], t. I, pp. 8-13); un poco más lejos (pp. 12-13) se enuncia la «regla de los signos», primera aparición del cálculo con números negativos[3]; finalmente, Diofanto utiliza por primera vez un símbolo literal para representar una incógnita en una ecuación. Por el contrario, no parece preocuparse mucho de poner en relación los métodos que utiliza con ideas generales, y en cuanto a la concepción axiomática de las leyes de composición, tal como empezaba a asomar en Euclides, parece tan alejada del pensamiento de Diofanto como del de sus continuadores inmediatos; no volverá a aparecer en el Algebra hasta principios del siglo XIX.

Era para ello necesario que, durante los siglos intermedios, se desarrollase por una parte un sistema de notaciones algebraicas adecuado para expresar leyes abstractas, y que, por otra, la noción de «número» se ampliase la suficiente como para permitir, mediante la observación de casos particulares bastante diferenciados, elevarse a concepciones generales. La teoría axiomática de las razones de magnitudes, creada por los griegos, resultaba inadecuada para estos fines, ya que no hacía otra cosa que precisar la noción intuitiva de número real > 0 y las operaciones con estos números, que ya eran conocidas por los babilonios en una forma más confusa; ahora se tratará, por el contrario, de «números» que no habían sido conocidos por los griegos, y de los que, en principio, no aparecía ninguna «representación» sensible: por una parte el cero y los números negativos, que aparecen a partir de la alta Edad Media en la matemática india, y por otra los números imaginarios, creación de los algebristas italianos del siglo XVI.

[3] Puesto que Diofanto no conocía los números negativos esta regla solamente puede interpretarse en relación con el cálculo de polinomios, permitiendo desarrollar productos tales como $(a - b)(c - d)$.

Si dejamos aparte el cero, introducido primeramente como símbolo de numeración antes de ser considerado como un número (véase p. 72), el carácter común de estas extensiones es el de ser, al menos al principio, puramente «formales». Esto debe entenderse en el sentido de que los nuevos «números» aparecieron primeramente como resultados de operaciones realizadas en condiciones en las cuales, de atenerse estrictamente a su definición, no tendrían sentido (por ejemplo, la diferencia $a - b$ de dos enteros naturales cuando es $a < b$): de aquí la denominación de números «falsos», «ficticios», «absurdos», «imposibles», «imaginarios», etc. Para los griegos de la época clásica, buscadores ante todo de la claridad, estas extensiones hubieran sido inconcebibles; solo podían venir de calculadores más dispuestos que ellos a depositar una confianza un poco mística en el poder de sus métodos («en la generalidad del Análisis», como dirá el siglo XVIII) y a dejarse llevar por el mecanismo de sus cálculos sin pararse a comprobar lo lícito de cada paso, confianza en general justificada *a posteriori* por los resultados exactos a que conducía la extensión a estos nuevos entes matemáticos de las reglas de cálculo únicamente válidas, en rigor, para los números conocidos anteriormente. Esto explica cómo fueron poco a poco atreviéndose a considerar por sí mismas (independientemente de toda aplicación a cálculos concretos), estas generalizaciones de la noción de número que, al principio, solamente aparecían en los pasos intermedios de una sucesión de operaciones cuyos puntos de partida y llegada eran verdaderos «números»; una vez dado este paso se empezó a buscar interpretaciones más o menos tangibles de estas nuevas entidades, que de este modo adquirían su derecho de ciudadanía dentro de la Matemática[4].

En lo que a esto se refiere, los indios ya eran conscientes de la interpretación que debe darse a los números negativos en algunos casos (por ejemplo, una deuda en un problema comercial). En los siglos siguientes, a medida que se difunden en Occidente (por medio

[4] Este trabajo no ha constituido por otra parte más que un estadio transitorio de la evolución de las nociones de que se trata; desde mediados del siglo XIX se ha vuelto, y esta vez de una forma completamente consciente, a una concepción formal de las distintas extensiones de la noción de número, concepción que ha terminado por integrarse en el punto de vista «formalista» y axiomático, que domina el conjunto de las matemáticas modernas.

de los árabes) los métodos y resultados de la matemática griega y la india, comienza la familiaridad con el manejo de estos números, y se empieza a dar otras interpretaciones de ellos, de carácter geométrico o cinemático. Por otra parte, este es, junto con una mejora progresiva de la notación algebraica, el único progreso notable del Algebra al final de la Edad Media.

A principios del siglo XVI el Algebra conoció un nuevo impulso gracias al descubrimiento, por los matemáticos de la escuela italiana, de la resolución «por radicales» de la ecuación de tercer grado, y después de la de cuarto (véase pp. 104-106); es entonces cuando, a pesar de su repugnancia, se vieron obligados, por así decirlo, a introducir en sus cálculos los imaginarios. Sin embargo, poco a poco fue aumentando la confianza en el cálculo con estos números «imposibles», igual que con los números negativos, y esto pese a que durante más de dos siglos no se dio ninguna «representación» de ellos.

Por otro lado, la notación algebraica fue perfeccionada decisivamente por Viète y Descartes; a partir de este último, la notación algebraica es ya poco más o menos la que empleamos hoy.

Parece que desde mediados del siglo XVII hasta finales del XVIII, los vastos horizontes abiertos por la creación del Cálculo infinitesimal hicieron que se despreciase un poco el Algebra, y sobre todo la reflexión matemática sobre las leyes de composición o sobre la naturaleza de los números reales o complejos[5]. Esta es la razón por la que la composición de fuerzas y la de velocidades, bien conocidas en Mecánica desde finales del siglo XVII, no tuvieron ninguna repercusión sobre el Algebra, aunque en ellas estuviese el germen del cálculo vectorial. Efectivamente, hay que esperar hasta el movimiento de ideas que, alrededor de 1800, lleva a la representación geométrica de los números complejos (véase pp. 219-220) para ver emplear en Matemáticas puras la suma de vectores[6].

[5] Hay que dejar aparte los intentos de Leibniz, por un lado para dar forma algebraica a los razonamientos de la lógica formal (véase p. 20), y por otro para fundar un «cálculo geométrico» que operase sobre los elementos geométricos sin pasar por las coordenadas ([*198* a], t. V, p. 141). Pero estos intentos no pasaron de esbozos, y no tuvieron ningún eco entre los contemporáneos, siendo recogidos solamente a lo largo del siglo XIX (véase más abajo).

[6] Además esta operación se introduce sin hacer ninguna referencia a la Mecánica; el parentesco entre las dos teorías solamente es reconocido explícitamente por los fundadores del Cálculo vectorial en el segundo tercio del siglo XIX (véase pp. 92-93).

En esta misma época la noción de ley de composición se extiende, en dos direcciones diferentes, a objetos que no tienen más que un parecido muy remoto con los «números» (en el sentido más general dado hasta ahora a la palabra). La primera de estas extensiones es debida a C. F. Gauss, con ocasión de sus trabajos aritméticos sobre las formas cuadráticas $ax^2 + bxy + cy^2$ con coeficientes enteros. Lagrange había definido, en el conjunto de formas con el mismo discriminante, una relación de equivalencia[7], y, por otra parte, había demostrado una identidad que daba lugar, en este conjunto, a una ley de composición conmutativa (no siempre definida); partiendo de estos resultados Gauss demuestra que esta ley de composición es compatible con una relación de equivalencia ligeramente diferente ([*124* a], t. I. p. 272): «*De este modo vemos*, nos dice, *qué es lo que debe entenderse por una clase compuesta de dos o más clases*». A continuación estudia la ley «cociente» que acaba de definir, llegando en sustancia a la conclusión de que es (dicho en lenguaje moderno) una ley de grupo abeliano, empleando razonamientos casi siempre mucho más generales que para el caso particular considerado por Gauss (por ejemplo, el razonamiento mediante el que prueba la unicidad del elemento simétrico es aplicable a toda ley de composición (*ibid.*, p. 273)). Pero no se detiene aquí, y, considerando la cuestión desde un punto de vista más amplio, reconoce la analogía entre la composición de las clases y la multiplicación de enteros módulo un número primo[8] (*ibid.*, p. 371), pero hace notar también que el grupo de las clases de formas cuadráticas de discri-

[7] Dos formas son equivalentes cuando una de ellas se deduce a partir de la otra mediante un «cambio de variables» $x' = \alpha x + \beta y$, $y' = \gamma x + \delta y$, siendo α, β, γ, δ enteros tales que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

[8] Es muy de destacar que Gauss designe *aditivamente* la composición de clases de formas cuadráticas, a pesar de la analogía que él mismo señala, y a pesar del hecho de que la identidad de Lagrange, que define la composición de dos formas, sugiere de un modo mucho más natural la notación multiplicativa (a la que además volvieron todos los sucesores de Gauss). En esta indiferencia en materia de notación debemos ver un testimonio más de la generalidad a que Gauss había llegado en sus concepciones relativas a las leyes de composición. Por otra parte, Gauss no se limitaba a las leyes conmutativas, como lo prueba un fragmento no publicado a lo largo de su vida, pero fechado en los años 1819-1829, en el que da, más de veinte años antes que Hamilton, las fórmulas de multiplicación de los cuaterniones ([*124* a], t. VIII, página 357).

minante dado no siempre es un grupo cíclico; las indicaciones que da sobre el tema inducen a pensar que había reconocido, al menos en este caso particular, la estructura general de los grupos abelianos finitos ([*124* a], t. I, p. 374, y t. II, p. 266).

La otra serie de trabajos de que queríamos hablar dio lugar igualmente a la noción de grupo, introduciéndola de forma definitiva en la Matemática; se trata de la «teoría de las sustituciones», desarrollando las ideas de Lagrange, Vandermonde, y Gauss sobre la resolución de ecuaciones algebraicas. No haremos aquí la historia detallada de este problema (véase pp. 108-112); debemos sin embargo mencionar la definición por Ruffini [*256*], y más tarde por Cauchy ([*56* a], (2), t. I, p. 64) del «producto» de dos permutaciones de un conjunto finito[9], y de las primeras nociones referentes a los grupos finitos de permutaciones: transitividad, primitividad, elemento neutro, elementos permutables, etc. Pero estos primeros trabajos fueron en general muy superficiales, y es Evariste Galois quien debe ser considerado como el verdadero iniciador de la teoría: habiendo, en sus memorables trabajos [*123*], reducido el estudio de las ecuaciones algebraicas al de los grupos de permutaciones que les asocia, profundiza considerablemente este último, tanto en lo referente a las propiedades generales de los grupos (siendo Galois el primero en definir la noción de subgrupo invariante y en darse cuenta de su importancia), como en la determinación de grupos dotados de propiedades particulares (donde los resultados obtenidos por él figuran todavía hoy entre los más sutiles de la teoría). También se debe a Galois la primera idea acerca de la «representación lineal de grupos»[10], y este hecho prueba claramente que estaba en posesión de la noción de *isomorfía* de dos estructuras de grupo, independientemente de sus «realizaciones».

Si bien parece innegable que los métodos geniales de Gauss y de Galois les habían llevado a una concepción muy amplia de la noción

[9] La noción de función compuesta era naturalmente bien conocida mucho antes, al menos para las funciones de variables reales o complejas, pero el aspecto algebraico de esta ley de composición y la relación con el producto de dos permutaciones solamente son sacadas a la luz por los trabajos de Abel ([*1*], t. I, p. 478) y de Galois.

[10] Es en esta ocasión cuando Galois, mediante una atrevida extensión del «formalismo» que había llevado a los números complejos, considera «raíces imaginarias» de una congruencia módulo un número primo, descubriendo así los *cuerpos finitos* (véase p. 117).

de ley de composición, no tuvieron ocasión de desarrollar particularmente sus ideas sobre este punto, y sus trabajos no ejercieron una acción inmediata sobre la evolución del Algebra abstracta[11]. Fue en una tercera dirección en la que se hicieron los progresos más claros hacia la abstracción: después de una serie de reflexiones sobre la naturaleza de los imaginarios (cuya representación geométrica había dado lugar, a principios de siglo, a numerosos trabajos), los algebristas de la escuela inglesa fueron los primeros en llegar, entre 1830 y 1850, a la noción abstracta de ley de composición, e inmediatamente amplían el campo del Algebra aplicando esta noción a una multitud de nuevos entes matemáticos: álgebra de la Lógica con Boole (véase p. 20), vectores, cuaterniones, y sistemas hipercomplejos generales con Hamilton [*145* a], matrices y leyes no asociativas con Cayley ([*58*], t. I, pp. 127 y 301, y t. II, pp. 185 y 475). Una evolución paralela va teniendo lugar independientemente en el continente, sobre todo en lo que se refiere al Cálculo vectorial (Möbius, Bellavitis), el Algebra lineal y los sistemas hipercomplejos (Grassmann) (véase pp. 92-94)[12].

Como consecuencia de todo este hervidero de ideas originales y fecundas que vinieron a dar nueva vida al Algebra en la primera mitad del siglo XIX, ésta resulta renovada incluso en sus tendencias más generales. Anteriormente los métodos y los resultados gravitaban en torno al problema central de la resolución de las ecuaciones algebraicas (o de las ecuaciones diofánticas en Teoría de Números): «*El Algebra*», dice Serret en la Introducción de su Curso de Algebra superior [*284*], «*es, propiamente hablando, el Análisis de las ecuaciones*». Después de 1850, si bien los tratados de Algebra reservan todavía durante mucho tiempo el lugar más importante a la teoría de ecuaciones, los nuevos trabajos ya no están dominados por la preocupación de las aplicaciones inmediatas a la resolución de ecuaciones numéricas, orientándose cada vez más hacia lo que hoy consideramos como el problema fundamental del Algebra, el estudio de las estructuras algebraicas por sí mismas.

[11] Los de Galois permanecieron además ignorados hasta 1846, y los de Gauss solamente ejercieron una influencia directa en la Teoría de números.

[12] Las principales teorías desarrolladas en este periodo están excelentemente expuestas en la obra contemporánea de H. Hankel [*146*], en la que la noción abstracta de ley de composición es concebida y presentada con toda claridad.

Estos trabajos pueden dividirse bastante claramente en tres corrientes, que prolongan respectivamente las tres corrientes de ideas que acabamos de analizar, y se desarrollan paralelamente sin influencias recíprocas importantes hasta los últimos años del siglo XIX[13].

Consideremos primeramente la edificación, por la escuela alemana del siglo XIX (Dirichlet, Kummer, Kronecker, Dedekind, Hilbert) de la teoría de los números algebraicos, surgida de la obra de Gauss, al que se debe el primer estudio de este género, el de los números $a + bi$ (a y b racionales). No vamos aquí a seguir la evolución de esta teoría: nos limitaremos a poner en evidencia, para nuestro objeto, las nociones algebraicas abstractas que van apareciendo. A partir de los primeros sucesores de Gauss, la idea de *cuerpo* (de números algebraicos) está en la base de todos los trabajos sobre la cuestión (y también de los trabajos de Abel y Galois sobre las ecuaciones algebraicas); su campo de aplicación se amplía cuando Dedekind y Weber [*80*] calcan la teoría de las funciones algebraicas de una variable de la de los números algebraicos. A Dedekind se debe también ([*79*], t. III, p. 251) la introducción de la noción de *ideal*, que proporciona un nuevo ejemplo de ley de composición entre *conjuntos* de elementos; a él y a Kronecker se remonta el papel cada vez más importante desempeñado por los grupos abelianos y los módulos en la teoría de los cuerpos algebraicos; más adelante volveremos sobre ello (véase pp. 94-95 y 131-142).

Dejaremos también para más adelante la historia del desarrollo del Algebra lineal (p. 85) y de los sistemas hipercomplejos (p. 163) que prosigue sin la introducción de ninguna nueva noción algebraica, durante el final del siglo XIX y el principio del XX en Inglaterra (Sylvester, W. Clifford) y en América (B. y C. S. Peirce, Dickson, Wedderburn) siguiendo el camino trazado por Hamilton y Cayley, en Alemania (Weierstrass, Dedekind, Frobenius, Molien) y en Francia (Laguerre, E. Cartan) independientemente de los anglosajones y siguiendo métodos bastante diferentes.

[13] Dejamos aquí voluntariamente de lado todo lo que se refiere, durante este periodo, a la evolución de la geometría algebraica, y a la teoría de invariantes estrechamente relacionada con ella; estas dos teorías se desarrollan siguiendo métodos propios, orientados tanto hacia el Análisis como hacia el Algebra, y hasta una época reciente no han encontrado su lugar en el vasto edificio del Algebra moderna.

En lo que se refiere a la teoría de grupos, se desarrolla primeramente bajo el aspecto de teoría de grupos finitos de permutaciones, después de la publicación de las obras de Galois y de su difusión por medio de la obra de Serret [*284*] y sobre todo del gran «Traité des Substitutions» («Tratado de las sustituciones») de C. Jordan [*174* a]. En él resume este último, perfeccionándolos mucho, los trabajos de sus predecesores sobre las propiedades particulares de los grupos de permutaciones (transitividad, primitividad, etc.) obteniendo una serie de resultados la mayor parte de los cuales no han sido mejorados después; estudia igualmente a fondo algunos grupos particulares muy importantes, los grupos lineales y sus subgrupos (véase p. 191); y, por otra parte, él es quien introduce la noción fundamental de representación de un grupo sobre otro, así como (un poco después) la de grupo cociente, y quien demuestra una parte del teorema conocido con el nombre de «teorema de Jordan-Hölder»[14]. Finalmente, también se remonta a Jordan el primer estudio de los grupos *infinitos* [*174* b], que, por una parte S. Lie y por otra F. Klein y H. Poincaré debían desarrollar considerablemente, en dos direcciones diferentes, algunos años después.

Mientras tanto, los matemáticos habían ido dándose cuenta poco a poco de que lo esencial en un grupo es su ley de composición y no la naturaleza de los elementos que lo constituyen (véase, por ejemplo, [*58*] t. II, p. 123 y 131, y [*79*], t. III, p. 439). Sin embargo, aún incluso los trabajos sobre los grupos abstractos finitos siguen siendo considerados durante mucho tiempo como estudios de grupos de permutaciones, y la teoría autónoma de los grupos finitos no comienza a desarrollarse conscientemente hasta más o menos 1880. No vamos a seguir adelante con la historia de esta teoría, limitándonos a mencionar dos de las herramientas que, remontándose ambas al siglo XIX, siguen figurando hoy día entre las más empleadas en el estudio de los grupos finitos: los teoremas de Sylow[15] sobre los p-grupos, que datan de 1872 [*303*], y la teoría de los caracteres, creada durante los últimos años del siglo por Frobenius ([*119*], t. III, p. 1-37). El lector que desee profundizar en el estudio de la teoría de los grupos finitos y de los numerosos y difíciles problemas que plantea podrá consultar las monografías [*44* b], [*131*], [*291*] y [*341*].

Hacia 1880 se empieza igualmente a estudiar de modo sistemático las *presentaciones* de los grupos: hasta ese momento habían aparecido solamente

[14] Jordan había establecido únicamente la invariancia (salvo el orden) de los *órdenes* de los grupos cocientes de una «serie de Jordan-Hölder» para un grupo finito; fue O. Hölder quien demostró que los mismos grupos cocientes eran (salvo el orden) independientes de la serie considerada [*165*].

[15] La existencia de un subgrupo de orden p^n en un grupo finito cuyo orden es divisible por p^n es mencionada sin demostración en los papeles de Galois ([*123*], p. 72).

presentaciones de algunos grupos particulares, como por ejemplo para el grupo alternado G_5 en un trabajo de Hamilton [*145* b], o para los grupos de monodromía de las ecuaciones diferenciales y de las superficies de Riemann (Schwarz, Klein, Schläfli). W. Dyck es el primero en definir [*97*] (sin darle todavía un nombre) el grupo libre engendrado por un número finito de generadores, pero, más que por el grupo propiamente dicho, se interesa por el objeto «universal» que le permite definir de una manera precisa lo que pueda ser un grupo dado «por generadores y relaciones». Desarrollando una idea que procedía ya de Cayley, y visiblemente influenciado además por los trabajos de Riemann que acabamos de mencionar, Dyck describe una interpretación de un grupo de presentación dada, en el que cada uno de los generadores viene representado por un producto de dos inversiones con respecto a círculos tangentes o secantes (ver también [*44* b], cap. XVIII). Un poco más tarde, después del desarrollo de la teoría de las funciones automorfas por Poincaré y sus sucesores, y de la introducción por el mismo Poincaré de las herramientas de la Topología Algebraica, los primeros estudios del grupo fundamental se realizarán a la vez que los de las presentaciones de los grupos (Dehn, Tietze), ayudándose mutuamente ambas teorías. Es además un topólogo, J. Nielsen, quien introduce en 1924 la terminología de *grupo libre* en el primer estudio profundo de sus propiedades [*234*]. Casi inmediatamente después, E. Artin, también con motivo de algunas cuestiones de topología, introduce la noción de producto libre de grupos, y O. Schreier define de un modo más general el producto libre con subgrupos amalgamados. Tampoco nos ocuparemos aquí de la historia de los progresos posteriores en esta dirección, remitiendo a la obra [*216*] para más detalles.

Tampoco es ocasión de hablar de la extraordinaria acogida que tuvo, desde finales del siglo XIX, la idea de grupo (y la de *invariante*, íntimamente relacionada con ella) en Análisis, en Geometría, en Mecánica, y en Física teórica. Una invasión análoga de esta noción, y de las nociones algebraicas emparentadas con ella (grupos con operadores, anillos, ideales, módulos) en las partes del Algebra que hasta entonces parecían alejadas de su dominio, caracteriza el último periodo de la evolución que reconstruimos aquí, y que culmina con la síntesis de las tres tendencias antes señaladas. Esta unificación es obra sobre todo de la escuela alemana moderna: comenzada con Dedekind y Hilbert en los últimos años del siglo XIX, el trabajo de axiomatización del Algebra fue proseguido vigorosamente por E. Steinitz [*294* a], y después, a partir de 1920, bajo el impulso de E. Artin, E. Noether y los algebristas de su escuela (Hasse, Krull, O. Schreier, van der Waerden). El tratado de van der Waerden [*317* a], publicado en 1930, reunió por primera vez estos trabajos en una exposición de conjunto, abriendo el camino y sirviendo de guía a las múltiples investigaciones posteriores del Algebra abstracta.

ALGEBRA LINEAL Y ALGEBRA MULTILINEAL

El Algebra lineal es a la vez una de las ramas más antiguas de las matemáticas y una de las más nuevas. Por una parte, en los orígenes de las matemáticas se encuentran problemas que se resuelven por medio de una única multiplicación (o división), es decir, mediante el cálculo de un valor de una función $f(x) = ax$, o mediante la resolución de una ecuación $ax = b$; estos son problemas típicos del álgebra lineal, y no pueden tratarse, ni siquiera plantearse, correctamente, sin «pensar linealmente».

Por otra parte, no solamente estas cuestiones, sino casi todo lo referente a las ecuaciones de primer grado, habían sido relegadas hacía mucho tiempo a la enseñanza elemental, cuando el desarrollo moderno de las nociones de cuerpo, de anillo, de espacio vectorial topológico, etc., vino a poner en evidencia y a valorar las nociones esenciales del Algebra lineal (por ejemplo, la dualidad); es entonces cuando se percibió el carácter esencialmente lineal de casi toda el álgebra moderna, de la que esta «linealización» es una de las propiedades más características, y cuando se volvió a situar el Algebra lineal en el lugar que le correspondía. Escribir esta historia, desde el punto de vista en que nos situamos, sería pues una tarea tan impor-

tante como difícil, y deberemos contentarnos con algunas indicaciones bastante concisas.

Resulta de lo anterior que sin duda el Algebra lineal nació para satisfacer las necesidades de los calculadores prácticos; vemos así cómo la regla de tres ([*311*], t. I, pp. 150-155) y la regla de la falsa posición, enunciadas más o menos confusamente, desempeñan un papel importante en todos los manuales de aritmética práctica, desde el papiro Rhind de los egipcios hasta los de nuestras escuelas primarias, pasando por Aribata, los árabes, Leonardo de Pisa y los innumerables «libros de cálculo» de la Edad Media y del Renacimiento; pero probablemente no han sido nunca otra cosa que un resumen, para usos prácticos, de teorías científicas más avanzadas.

En lo que se refiere a los matemáticos propiamente dichos, la naturaleza de sus trabajos sobre el álgebra lineal está en función de la estructura general de su ciencia. La matemática griega antigua, tal como se expone en los *Elementos* de Euclides, desarrolló dos teorías abstractas de carácter lineal: por una parte, la de las magnitudes ([*107*], Libro V; cf. p. 191), y por otra la de los enteros ([*107*], Libro VII). En los babilonios encontramos métodos mucho más cercanos a nuestra álgebra elemental; sabían resolver, y de una manera enormemente elegante ([*232*], pp. 181-183), sistemas de ecuaciones de primer grado. Durante mucho tiempo, sin embargo, los progresos del álgebra lineal consisten sobre todo en los del cálculo algebraico, y es bajo este aspecto, ajeno a la presente Nota, como deben ser considerados. En efecto, para reducir un sistema lineal a una ecuación del tipo $ax = b$, es suficiente, si se trata de una sola incógnita, conocer las reglas (ya enunciadas sustancialmente por Diofanto) mediante las que pueden pasarse los términos de un miembro a otro, y combinar los términos semejantes; y si se trata de varias incógnitas, basta además saber eliminarlas sucesivamente hasta que quede solo una. También los tratados de álgebra, hasta el siglo XVIII, piensan haber cumplido su misión, en lo que al primer grado se refiere, una vez que han expuesto estas reglas; en cuanto a los sistemas con tantas ecuaciones como incógnitas (no consideran otros) cuyos primeros miembros no sean formas linealmente independientes, se contentan simplemente con señalar de pasada que se trata de un problema mal planteado. En los tratados del siglo XIX, e incluso en algunas obras más recientes, este punto de vista solamente se ve

modificado por algunos progresos de notación, que permiten escribir sistemas de n ecuaciones con n incógnitas, y por la introducción de los determinantes, que permiten dar fórmulas explícitas de resolución en el «caso general»; estos progresos, cuyo mérito correspondería a Leibniz ([*198* a], t. I, p. 239) si hubiera desarrollado y publicado sus ideas sobre la cuestión, se deben principalmente a los matemáticos del siglo XVIII y de principios del XIX.

Pero tenemos primeramente que examinar distintas corrientes de ideas, que contribuyeron, mucho más que el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, al desarrollo del álgebra lineal en el sentido en el que nosotros la entendemos. Inspirado por el estudio de Apolonio, Fermat ([*109*], t. I, pp. 91-110; trad. francesa, t. III, pp. 85-101), concibe, antes incluso que Descartes ([*85* a], t. VI), el principio de la geometría analítica, tiene la idea de clasificar las curvas planas según su grado (idea que se había ido haciendo poco a poco familiar a todos los matemáticos, y que puede considerarse como definitivamente adquirida hacia finales del siglo XVII), y enuncia el principio fundamental de que una ecuación de primer grado, en el plano, representa una recta, y una ecuación de segundo grado una cónica, principio del que se apresura a deducir «muy bellas» consecuencias relativas a lugares geométricos. Simultáneamente, enuncia ([*109*], t. I, pp. 184-188; trad. francesa, t. III, pp. 159-163) la clasificación de los problemas en problemas determinados, problemas que se reducen a una ecuación con dos incógnitas, a una ecuación con tres incógnitas, etc., y añade: los primeros consisten en la determinación de un punto, los segundos de una línea o un lugar plano, los siguientes de una superficie, etc. («...*en un problema de este tipo no se busca solamente un punto o una línea, sino toda una superficie apropiada al problema*; *de aquí nacen los lugares superficiales, e igualmente para las siguientes*», *loc. cit.*, p. 186; aquí está ya el germen de la geometría de n dimensiones). Este escrito, planteando el principio de la dimensión en álgebra y en geometría algebraica, denota una fusión del álgebra y de la geometría totalmente conforme con las ideas modernas, pero que, como ya hemos visto, tardó más de dos siglos en penetrar en los espíritus.

Al menos, estas ideas dieron lugar en seguida al desarrollo de la geometría algebraica, que alcanzó toda su amplitud en el siglo XVII con Clairaut, Euler, Cramer, Lagrange y tantos otros. El carácter

lineal de las fórmulas de transformación de coordenadas, que no pudo dejar de notar Fermat, es puesto en relieve por ejemplo por Euler ([*108* a] (1), t. IX, c. II-III, y Apénd. c. IV), que fundamenta sobre él la clasificación de las curvas planas y de las superficies según su grado (justamente invariante en virtud de la linealidad de estas fórmulas). Es también él (*loc. cit.*, c. XVIII) quien introduce la palabra «afinidad» para designar la relación entre dos curvas tales que puede pasarse de una a otra mediante una transformación de la forma $x' = ax$, $y' = by$ (pero sin hacer notar ningún invariante geométrico en esta definición, que está ligada a una elección particular de los ejes). Un poco después vemos a Lagrange ([*191*], t. III, pp. 661-692) consagrar toda una memoria, que fue justamente célebre durante mucho tiempo, a problemas típicamente lineales y multilineales de la geometría analítica en tres dimensiones. Es en esta misma época, y a propósito del problema lineal consistente en determinar una curva plana pasando por ciertos puntos dados, cuando toma cuerpo, primeramente en una forma en cierto modo empírica, la noción de determinante, con Cramer [*72*] y Bezout [*21*]. Más tarde desarrollada por varios autores, esta noción y sus propiedades fundamentales son definitivamente fijadas por Cauchy ([*56* a], (2), t. I, pp. 91-169) y Jacobi ([*171*], t. III, pp. 355-392).

Por otro lado, en tanto que los matemáticos mostraban una cierta tendencia a desdeñar las ecuaciones de primer grado, la resolución de ecuaciones diferenciales era, por el contrario, un problema capital, y era natural que desde el principio se distinguiesen las ecuaciones lineales (con coeficientes constantes o no) y que su estudio contribuyese a poner de manifiesto la linealidad correspondiente. Esto es visto por d'Alembert [*75* c], Lagrange ([*191*], t. I, pp. 471-668) y Euler ([*108* a], (1), t. XII), pero el primero es el único que considera útil indicar que la solución general de la ecuación no homogénea es suma de una solución particular y de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente; además, cuando estos autores enuncian que la solución general de la ecuación lineal homogénea de orden n es combinación lineal de n soluciones particulares, no añaden que éstas deben ser linealmente independientes, y no hacen ningún esfuerzo para explicitar esta última noción. Sobre este punto, como sobre tantos otros, no se hará luz hasta la enseñanza de Cauchy en la Escuela Politécnica ([*56* b], pp. 573-574). Pero ya Lagrange

(*loc. cit.*) había también introducido (aunque solamente para el cálculo, y sin darle un nombre) la ecuación adjunta $L^*(y) = 0$ de una ecuación diferencial lineal $L(y) = 0$, ejemplo típico de dualidad en virtud de la relación

$$\int zL(y)dx = \int L^*(z)ydx$$

válida para y y z anulándose en los extremos del intervalo de integración; con más precisión, y 30 años antes de que Gauss definiese explícitamente la traspuesta de una sustitución lineal de 3 variables, vemos aquí el primer ejemplo, sin duda, de un «operador funcional» L^* traspuesto o «adjunto» de un operador L dado mediante una función bilineal (en este caso la integral $\int yzdx$).

Al mismo tiempo, y también con Lagrange ([*191*], t. III, pp. 695-795), las sustituciones lineales, al principio en 2 y 3 variables solamente) iban a adueñarse de la aritmética. Es evidente que el conjunto de los valores de una función $F(x,y)$ cuando se da a x y a y todos los valores enteros, no cambia cuando se efectúa una sustitución lineal cualquiera en x, y, de coeficientes enteros y de determinante igual a 1; sobre esta observación fundamental funda Lagrange la teoría de la representación de números por medio de formas, y la de la reducción de las formas; y Gauss, dando un paso de cuyo atrevimiento es difícil darse cuenta hoy, extrae de aquí la noción de equivalencia y la de clase de formas (cf. p. 79), en relación con esto reconoce la necesidad de algunos principios elementales relativos a las sustituciones lineales, introduciendo en particular la noción de traspuesta o adjunta ([*124* a], t. I, p. 304). A partir de este momento, el estudio aritmético y el algebraico de las formas cuadráticas de 2, 3, y después n variables, el de las formas bilineales, que está estrechamente relacionado, y más recientemente, la generalización de estos resultados a infinitas variables, deberían constituir, hasta nuestra época, una de las fuentes de progreso más fecundas para el álgebra lineal (cf. pp. 189-191).

Pero, y esto representa quizá un avance todavía más decisivo, Gauss, en estas mismas *Disquisitiones*, creaba (cf. p. 79) la teoría

de los grupos abelianos finitos, que intervienen en ella de cuatro maneras diferentes, el grupo aditivo de los enteros módulo m (siendo m entero), el grupo multiplicativo de los números primos con m módulo m, el grupo de clases de formas cuadráticas binarias, y, finalmente, el grupo multiplicativo de las raíces m-ésimas de la unidad; como ya hemos dicho, Gauss trata todos estos grupos en tanto que grupos abelianos, o, más precisamente, como módulos sobre **Z**, estudia su estructura, sus relaciones de isomorfismo, etc. En el módulo de los «enteros complejos» $a + bi$ le vemos más tarde estudiar un módulo infinito sobre **Z**, cuyo isomorfismo con el módulo de periodos (descubiertos por él en el dominio complejo) de las funciones elípticas no pudo pasarle desapercibido; en cualquier caso, esta idea aparece ya claramente en Jacobi, por ejemplo, en su célebre demostración de la imposibilidad de una función con tres periodos, y en su manera de abordar el problema de la inversión de las integrales abelianas ([*171*], t. II, pp. 25-50), para llegar muy pronto a los teoremas de Kronecker ([*186* a], t. III_1, pp. 49-109).

A la corriente cuyo curso, y cuyos meandros a veces, hemos intentado seguir, viene a unirse otra que ha discurrido subterráneamente durante mucho tiempo. Como expondremos con más detalle (ver p. 181), la geometría «pura», en el sentido que se le ha dado durante el siglo pasado, es decir, esencialmente, la geometría proyectiva del plano y del espacio sin el empleo de coordenadas, había sido creada en el siglo XVII por Desargues [*84*], cuyas ideas, apreciadas en todo su valor por un Fermat, y desarrolladas por un Pascal, habían caído en el olvido, eclipsadas por los brillantes progresos de la Geometría analítica. A finales del siglo XVIII vuelve al primer plano de la mano de Monge, y después de Poncelet y sus emuladores, Brianchon y Chasles, apartándose a veces total y voluntariamente de los métodos analíticos, a veces (sobre todo en Alemania), mezclándose íntimamente con ellos. Pero las transformaciones proyectivas, cualquiera que sea el punto de vista (sintético o analítico) desde el que se las considere, no son otra cosa que sustituciones lineales en coordenadas proyectivas o «baricéntricas»; las cónicas (en el siglo XVII); y, más tarde, las cuádricas, cuya teoría proyectiva fue durante largo tiempo el principal tema de estudio de esta escuela, no son otra cosa que formas cuadráticas, cuya estrecha relación con el álgebra lineal ya ha

sido señalada. A estas nociones viene a unirse la de polaridad; creada también por Desargues, la teoría de los polos y polares se convierte en manos de Monge y sus sucesores, bajo el nombre de principio de dualidad, en un poderoso instrumento de transformación de teoremas geométricos; si bien no puede osarse afirmar que sus relaciones con las ecuaciones diferenciales adjuntas hayan sido señaladas más que muy tardíamente (son indicadas por Pincherle a finales de siglo), al menos no dejó de notarse, por mediación de Chasles ([*60* b], p. 55), su parentesco con la noción de triángulos esféricos recíprocos, introducida en Trigonometría esférica por Viète ([*319*], p. 418) y Snellius desde el siglo XVI. Pero la dualidad en la Geometría proyectiva no es más que un aspecto de la dualidad de los espacios vectoriales, teniendo en cuenta las modificaciones impuestas por el paso del espacio afín al espacio proyectivo (que es su espacio cociente por la relación «multiplicación escalar»).

El siglo XIX ha sido, más que cualquier otra época de nuestra historia, rico en matemáticos de primer orden, y es difícil describir en algunas páginas, incluso limitándose a los puntos más importantes, todo lo que la fusión de estos movimientos de ideas vino a dar lugar en sus manos. Entre, por una parte, los métodos puramente sintéticos, especie de lecho de Procusto en el que se torturan a sí mismos sus adeptos ortodoxos, y los métodos analíticos ligados a un sistema de coordenadas impuesto arbitrariamente al espacio, se siente muy pronto la necesidad de una especie de cálculo geométrico, soñado pero no creado por Leibniz, e imperfectamente esbozado por Carnot [*51*]. Primeramente aparece la suma de vectores, implícita en Gauss por su representación geométrica de los imaginarios y la aplicación que hace de ello a la geometría elemental (cf. p. 220), desarrollada por Bellavitis con el nombre de «método de las equipolencias», y que toma su forma definitiva en Grassmann, Möbius, y Hamilton; al mismo tiempo, y con el nombre de «cálculo baricéntrico», Möbius da una versión de él adaptada a las necesidades de la Geometría proyectiva ([*223*], t. I).

En la misma época, y por los mismos hombres, tiene lugar el paso, tan natural una vez que se ha tomado este camino, y que hemos visto anunciado en Fermat, del plano y del espacio «ordinario» al espacio de n dimensiones; paso incluso inevitable, puesto que los fenómenos algebraicos, que para dos o tres variables se interpretan

de los grupos abelianos finitos, que intervienen en ella de cuatro maneras diferentes, el grupo aditivo de los enteros módulo m (siendo m entero), el grupo multiplicativo de los números primos con m módulo m, el grupo de clases de formas cuadráticas binarias, y, finalmente, el grupo multiplicativo de las raíces m-ésimas de la unidad; como ya hemos dicho, Gauss trata todos estos grupos en tanto que grupos abelianos, o, más precisamente, como módulos sobre **Z**, estudia su estructura, sus relaciones de isomorfismo, etc. En el módulo de los «enteros complejos» $a + bi$ le vemos más tarde estudiar un módulo infinito sobre **Z**, cuyo isomorfismo con el módulo de periodos (descubiertos por él en el dominio complejo) de las funciones elípticas no pudo pasarle desapercibido; en cualquier caso, esta idea aparece ya claramente en Jacobi, por ejemplo, en su célebre demostración de la imposibilidad de una función con tres periodos, y en su manera de abordar el problema de la inversión de las integrales abelianas ([*171*], t. II, pp. 25-50), para llegar muy pronto a los teoremas de Kronecker ([*186* a], t. III_1, pp. 49-109).

A la corriente cuyo curso, y cuyos meandros a veces, hemos intentado seguir, viene a unirse otra que ha discurrido subterráneamente durante mucho tiempo. Como expondremos con más detalle (ver p. 181), la geometría «pura», en el sentido que se le ha dado durante el siglo pasado, es decir, esencialmente, la geometría proyectiva del plano y del espacio sin el empleo de coordenadas, había sido creada en el siglo XVII por Desargues [*84*], cuyas ideas, apreciadas en todo su valor por un Fermat, y desarrolladas por un Pascal, habían caído en el olvido, eclipsadas por los brillantes progresos de la Geometría analítica. A finales del siglo XVIII vuelve al primer plano de la mano de Monge, y después de Poncelet y sus emuladores, Brianchon y Chasles, apartándose a veces total y voluntariamente de los métodos analíticos, a veces (sobre todo en Alemania), mezclándose íntimamente con ellos. Pero las transformaciones proyectivas, cualquiera que sea el punto de vista (sintético o analítico) desde el que se las considere, no son otra cosa que sustituciones lineales en coordenadas proyectivas o «baricéntricas»; las cónicas (en el siglo XVII); y, más tarde, las cuádricas, cuya teoría proyectiva fue durante largo tiempo el principal tema de estudio de esta escuela, no son otra cosa que formas cuadráticas, cuya estrecha relación con el álgebra lineal ya ha

sido señalada. A estas nociones viene a unirse la de polaridad; creada también por Desargues, la teoría de los polos y polares se convierte en manos de Monge y sus sucesores, bajo el nombre de principio de dualidad, en un poderoso instrumento de transformación de teoremas geométricos; si bien no puede osarse afirmar que sus relaciones con las ecuaciones diferenciales adjuntas hayan sido señaladas más que muy tardíamente (son indicadas por Pincherle a finales de siglo), al menos no dejó de notarse, por mediación de Chasles ([*60* b], p. 55), su parentesco con la noción de triángulos esféricos recíprocos, introducida en Trigonometría esférica por Viète ([*319*], p. 418) y Snellius desde el siglo XVI. Pero la dualidad en la Geometría proyectiva no es más que un aspecto de la dualidad de los espacios vectoriales, teniendo en cuenta las modificaciones impuestas por el paso del espacio afín al espacio proyectivo (que es su espacio cociente por la relación «multiplicación escalar»).

El siglo XIX ha sido, más que cualquier otra época de nuestra historia, rico en matemáticos de primer orden, y es difícil describir en algunas páginas, incluso limitándose a los puntos más importantes, todo lo que la fusión de estos movimientos de ideas vino a dar lugar en sus manos. Entre, por una parte, los métodos puramente sintéticos, especie de lecho de Procusto en el que se torturan a sí mismos sus adeptos ortodoxos, y los métodos analíticos ligados a un sistema de coordenadas impuesto arbitrariamente al espacio, se siente muy pronto la necesidad de una especie de cálculo geométrico, soñado pero no creado por Leibniz, e imperfectamente esbozado por Carnot [*51*]. Primeramente aparece la suma de vectores, implícita en Gauss por su representación geométrica de los imaginarios y la aplicación que hace de ello a la geometría elemental (cf. p. 220), desarrollada por Bellavitis con el nombre de «método de las equipolencias», y que toma su forma definitiva en Grassmann, Möbius, y Hamilton; al mismo tiempo, y con el nombre de «cálculo baricéntrico», Möbius da una versión de él adaptada a las necesidades de la Geometría proyectiva ([*223*], t. I).

En la misma época, y por los mismos hombres, tiene lugar el paso, tan natural una vez que se ha tomado este camino, y que hemos visto anunciado en Fermat, del plano y del espacio «ordinario» al espacio de n dimensiones; paso incluso inevitable, puesto que los fenómenos algebraicos, que para dos o tres variables se interpretan

de modo natural en términos geométricos, subsisten sin variación para un número cualquiera de variables; imponerse entonces en el empleo del lenguaje geométrico la limitación a 2 ó 3 dimensiones sería para el matemático moderno un yugo tan incómodo como el que impidió siempre a los griegos extender la noción de número a las razones de magnitudes inconmensurables. También el lenguaje y las ideas relativas al espacio de *n* dimensiones aparecen más o menos a la vez en todas partes, oscuramente en Gauss, claramente en los matemáticos de la generación siguiente, y su mayor o menor atrevimiento para servirse de ellos parecen depender menos de sus inclinaciones matemáticas que de puntos de vista filosóficos o incluso puramente prácticos. En todo caso, Cayley y Grassmann, en 1846, manejan estos conceptos con toda soltura (y esto, dice Cayley a diferencia de Grassmann [*58*], t. I, p. 321), «*sin recurrir a ninguna noción metafísica*»); en Cayley, estamos siempre muy cerca de la interpetación analítica y de las coordenadas, mientras que en Grassmann es desde el principio, con la suma de vectores en el espacio de *n* dimensiones, el aspecto geométrico el que predomina, hasta llegar a los resultados de los que enseguida hablaremos.

Sin embargo, el impulso que provenía de Gauss empujaba, de dos maneras diferentes, a los matemáticos al estudio de las álgebras o sistemas hipercomplejos. Por un lado, no podía dejarse de intentar extender el dominio de los números reales por procedimientos distintos de la introducción de la «unidad imaginaria» $i = \sqrt{-1}$, y encontrar así dominios más vastos y tan fecundos como el de los números complejos. El mismo Gauss estaba convencido ([*124* a], t. II, p. 178) de la imposibilidad de esta extensión, al menos en tanto que se intentase conservar las principales propiedades de los números complejos, es decir, en lenguaje moderno, las que le convierten en un cuerpo conmutativo; y, bien como consecuencia de su influencia, bien independientemente, sus contemporáneos parecen haber compartido esta convicción, que no será justificada hasta mucho más tarde por Weierstrass ([*329* a], t. II, pp. 311-332) en un teorema preciso. Pero, desde el momento en que se interpreta la multiplicación de números complejos mediante las rotaciones en el plano, se encuentra uno llevado a considerar, si se quiere extender esta idea al espacio (puesto que las rotaciones en el espacio forman un grupo no abeliano), las multiplicaciones no conmutativas; esta es una de las ideas que guían a Hamilton [1] en su descubrimiento de los cuaterniones [*145* a], primer ejemplo de cuerpo no conmutativo. La singularidad de este ejemplo (el único, como debía demostrar Frobenius más tarde, que puede construirse sobre el cuerpo de los reales) restringe algo su alcance, a pesar, o más bien a causa, de la formación de una escuela de «cuaternionistas» fanáticos, extraño fenómeno que se reproduce más tarde alrededor de la obra de Grassmann, y después en los vulgarizadores que toman de Hamilton y Grassmann lo que se ha llamado «cálculo vectorial». El abandono un poco más tarde de la asociatividad, por Graves y Cayley, que construyen los «números de Cayley», no abre ningún camino interesante. Pero, después de que Sylvester hubiese introducido las matrices, y (sin darle nombre) hubiese definido con claridad el rango ([*304*], t. I, pp. 145-151), es el mismo Cayley ([*58*], t. II, pp. 475-496), quién creó el cálculo correspondiente, no sin observar el hecho esencial (olvidado muy a menudo en lo sucesivo) de que una matriz no es otra cosa que una abreviatura para una sustitución lineal, del mismo modo que Gauss designaba por (a, b, c) la forma $aX^2 + 2bXY + cY^2$. Este no es más que uno de los aspectos, sin duda el más interesante para nosotros, de la abundante producción de Sylvester y Cayley sobre los determinantes y las cuestiones relacionadas con ellos, producción llena de ingeniosas identidades y de cálculos impresionantes.

Grassmann descubre también, entre otras cosas, un álgebra sobre los reales, el álgebra exterior a la que se ha ligado su nombre. Su obra, anterior incluso a la de Hamilton ([*134*], t. I_1), creada en una soledad moral casi total, fue durante mucho tiempo mal conocida, debido, sin duda, a su originalidad, y debido también a las brumas filosóficas en las que se envolvió, y que, por ejemplo, alejaron inmediatamente a Möbius. Movido por preocupaciones análogas a las de Hamilton, pero de mayor alcance (y que, como se manifestaría muy pronto, eran las mismas de Leibniz), Grassmann construyó un vasto edificio algebraico-geométrico, basándose en una concepción geométrica o «intrínseca» (ya más o menos axiomatizada) del espacio vectorial de *n* dimensiones; citemos, por ejemplo, entre los

[1] Cf. el interesante prefacio de sus *Lectures on quaternions* (Conferencias sobre los cuaterniones) [*145* a] en las que relata todo el aspecto histórico de su descubrimiento.

resultados más elementales obtenidos, la definición de la independencia lineal de vectores, la de dimensión, y la relación fundamental $dim\ V + dim\ W = dim\ (V + W) + dim\ (V \cap W)$ (*loc. cit.*, p. 209; cf. [*134*], t. I_2, p. 21). Pero son, sobre todo, la multiplicación exterior, y después la multiplicación interior, de los multivectores, las que le proporcionan las herramientas por medio de las cuales trata fácilmente los problemas del Algebra lineal propiamente dicha, en primer lugar, y luego los relacionados con la estructura euclídea, es decir, con la ortogonalidad de los vectores (en la que encuentra el equivalente de la dualidad que le falta).

El otro camino abierto por Gauss, en el estudio de los sistemas hipercomplejos, es el que parte de los enteros complejos $a + bi$; a partir de éstos se pasa de un modo natural a las álgebras o sistemas hipercomplejos más generales, sobre el anillo **Z** de los enteros y sobre el cuerpo **Q** de los racionales, y enseguida a los engendrados por las raíces de la unidad (ya considerados por Gauss), se llega después a los cuerpos de números algebraicos y a los módulos de enteros algebraicos: aquéllos son el objeto principal de la obra de Kummer, el estudio de éstos es abordado por Dirichlet, Hermite, Kronecker, y Dedekind. Aquí, contrariamente a lo que sucede en las álgebras sobre los reales, no es necesario renunciar a ninguna de las propiedades características de los cuerpos conmutativos, limitándose a éstos durante todo el siglo XIX. Pero las propiedades lineales, por ejemplo, la búsqueda de la base para los enteros del cuerpo (indispensable para una noción general de discriminante) desempeñan en muchas cuestiones un papel fundamental, y en Dedekind los métodos están destinados a convertirse en típicamente «hipercomplejos». Además, el mismo Dedekind, sin plantearse de modo general el problema de las álgebras, es consciente de esta particularidad de sus trabajos, y de lo que los acerca, por ejemplo, a los resultados de Weierstrass referentes a los sistemas hipercomplejos sobre los reales ([*79*], en particular vol. II, pp. 1-19). Al mismo tiempo, la determinación de la estructura del grupo multiplicativo de las unidades de un cuerpo de números algebraicos, realizada por Dirichlet en sus célebres notas ([*92*], t. I, pp. 619-644) y casi simultáneamente por Hermite ([*159*], t. I, pp. 159-160), era extraordinariamente adecuada para iluminar las ideas acerca de los módulos sobre **Z**, sus sistemas de generadores, y sus bases, cuando las poseen. Después, la noción de ideal, definida por Dedekind para los cuerpos de números algebraicos (como módulo sobre el anillo de los enteros del cuerpo) ([*79*], t. III, p. 251), en tanto que Kronecker introduce una noción equivalente ([*186* a], t. II, pp. 334-342) en los anillos de polinomios (bajo el nombre de «sistemas de módulos»), proporciona los primeros ejemplos de módulos sobre anillos más generales que **Z**; y, con estos mismos autores, y después con Hilbert, va surgiendo poco a poco a partir de casos particulares la noción de grupo con operadores, y la posibilidad de construir siempre a partir de uno de estos grupos un módulo sobre un anillo convenientemente definido.

Al mismo tiempo, el estudio aritmético-algebraico de las formas cuadráticas y bilineales, y de su «reducción» (o lo que es igual, de las matrices y de sus «invariantes») conduce al descubrimiento de principios generales sobre la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, principios que, por carecer de la noción de rango, no había alcanzado Jacobi[2]. El problema de hallar las soluciones enteras de los sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes enteros es abordado y resuelto, primeramente en un caso particular por Hermite, y después en el caso general por H. J. Smith ([*287*], t. I, pp. 367-409); Frobenius vuelve a obtener, ya en 1879, los resultados de este último, dentro del marco del amplio programa de trabajos trazado por Kronecker y en el que también participa Weierstrass. Incidentalmente, es también Kronecker el que, en el curso de estos trabajos, da su forma definitiva a los teoremas relativos a los sistemas lineales con coeficientes reales (o complejos), que también expone, en un oscuro manual, y con su minuciosidad característica, el célebre autor de *Alicia en el país de las maravillas*; en cuanto a Kronecker, desdeña publicar estos resultados, y los abandona a sus colegas y discípulos; la misma palabra rango se debe a Frobenius. En sus cursos en la universidad de Berlín, Kronecker [*186* b] y Weierstrass introducen también la definición «axiomática» de determinante como función multilineal alternada de n vectores en el espacio de dimensión n, normalizada de tal modo que tome el valor 1 para la matriz unidad, definición equivalente a la que se deduce del cálculo de Grassmann. También en sus cursos

[2] Acerca de la clasificación de los sistemas de n ecuaciones con n incógnitas cuando el determinante se anula, dice ([*171*], t. III, p. 370): «*paullo prolixum videtur negotium*» (no podría dilucidarse brevemente).

introduce Kronecker, sin sentir la necesidad de darle un nombre, y en forma aún no intrínseca, el producto tensorial de espacios y el producto «kroneckeriano» de matrices (sustitución lineal inducida en un producto tensorial por sustituciones lineales dadas aplicadas a los factores).

Estos trabajos no podrían aislarse tampoco de la teoría de los invariantes, creada por Cayley, Hermite y Sylvester (la «trinidad invariante» de la que más tarde hablaría Hermite en sus cartas) y que, desde un punto de vista moderno es sobre todo una teoría de las representaciones del grupo lineal. Aquí aparece, como equivalente algebraico de la dualidad de la geometría proyectiva, la distinción entre variables covariantes y contravariantes, es decir, de vectores en un espacio y vectores en el espacio dual. Después de que la atención se dirigiese primeramente hacia las formas de grado pequeño, y después a las de grado cualquiera en 2 y 3 variables, no se tardó mucho en considerar las formas bilineales, y luego multilineales, con varias series de variables «covariantes» y «contravariantes», lo que equivale a la introducción de los tensores; esta teoría adquiere importancia y popularidad cuando, inspirados por la teoría de los invariantes, Ricci y Levi-Civita introducen, en 1900, el cálculo tensorial en la geometría diferencial [*257*], que alcanzó posteriormente una época de esplendor como consecuencia de su empleo por los físicos «relativistas». Fue también el entrecruzamiento progresivo de la teoría de los invariantes, de la geometría diferencial, y de las ecuaciones en derivadas parciales (sobre todo el llamado problema de Pfaff y sus generalizaciones) los que fueron llevando poco a poco a los geómetras a considerar, primero las formas bilineales alternadas de diferenciales, en particular el «covariante bilineal» de una forma de grado 1 (introducido por Lipschitz en 1870, y estudiado más tarde por Frobenius), hasta llegar a la creación por E. Cartan ([*52* a], t. II_1, pp. 303-396) y Poincaré ([*251* b], t. III, cap. XXII) del cálculo de formas diferenciales exteriores. Poincaré las introduce, con vistas a la formación de sus invariantes integrales, en tanto que expresiones que aparecen en las integrales múltiples, mientras que Cartan, sin duda, guiado por sus trabajos sobre las álgebras, lo hace de un modo más formal, aunque no sin hacer notar que el aspecto algebraico de su cálculo es idéntico a la multiplicación exterior de Grassmann (de aquí el nombre que adopta), colocando finalmente la obra de este último en el lugar que le correspondía. La traducción de las formas diferenciales exteriores al lenguaje del Cálculo tensorial muestra inmediatamente su relación con los tensores hemisimétricos, lo que, volviendo al punto de vista puramente algebraico, indica que están con las formas multilineales alternadas en la misma relación que los tensores covariantes con las formas multilineales cualesquiera. Este aspecto se ilumina aún más con la teoría moderna de las representaciones del grupo lineal, y de este modo se reconoce, por ejemplo, la identidad sustancial entre la definición de los determinantes dada por Weiertrass y Kronecker, y la resultante del cálculo de Grassmann.

Así llegamos a la época moderna, en la que el método axiomático y la noción de estructura (primeramente intuida, y definida solo muy recientemente) nos permiten distinguir conceptos que hasta entonces habían estado indisolublemente unidos, formular con precisión lo que era vago o inconsciente, y demostrar con la generalidad que les corresponde teoremas que solamente eran conocidos en casos particulares. Peano, uno de los creadores del método axiomático, y también uno de los primeros matemáticos en apreciar en todo su valor la obra de Grassmann, dio ya en 1888 ([*246* b], cap. IX) la definición axiomática de los espacios vectoriales (de dimensión finita o no) sobre el cuerpo de los reales y, con una notación completamente moderna, la de las aplicaciones lineales de un espacio vectorial en otro. Un poco más tarde, Pincherle intentó aplicar el álgebra lineal, así concebida, a la teoría de funciones, siguiendo una dirección que ciertamente se ha mostrado como poco fecunda, pero al menos su punto de vista le permitió reconocer en el «adjunto de Lagrange» un caso particular de la trasposición de las aplicaciones lineales, lo que muy pronto se puso de manifiesto, y de modo todavía más claro, para las ecuaciones en derivadas parciales igual que para las ecuaciones diferenciales, en el curso de los memorables trabajos de Hilbert y su escuela sobre el espacio de Hilbert y sus aplicaciones al análisis. A propósito de estos últimos trabajos, Toeplitz [*309* a], introduciendo también (pero mediante coordenadas) el espacio vectorial más general sobre los reales, hace la observación fundamental de que la teoría de determinantes no es necesaria para la demostración de los principales teoremas del Algebra lineal, lo que permite extender éstos sin dificultad a los espacios de dimensión infinita, y hace notar

también que el Algebra lineal así entendida se aplica igualmente a un cuerpo de base comutativo cualquiera.

Por otro lado, con la introducción por Banach, en 1922, de los espacios que llevan su nombre[3], aparecen, bien es cierto que en un problema tan topológico como algebraico, espacios no isomorfos a su dual (ver pp. 295-298). Ya no existe un isomorfismo «canónico», es decir, determinado por la estructura, entre un espacio vectorial de dimensión finita y su dual, lo que se reflejaba desde hacía mucho tiempo en la distinción entre covariante y contravariante. Sin embargo, parece que no puede dudarse de que la distinción entre un espacio y su dual solo aparece claramente después de los trabajos de Banach y de su escuela, son también estos trabajos los que hacen resaltar el interés de la noción de codimensión. En cuanto a la dualidad u «ortogonalidad» entre los subespacios de un espacio vectorial y los de su dual, la manera como se formula hoy presenta una analogía que no es meramente exterior con la formulación moderna del teorema principal de la teoría de Galois, y con la llamada dualidad de Pontrjagin en los grupos abelianos localmente compactos; ésta se remonta a Weber, que, con ocasión de algunos trabajos en aritmética, sienta las bases, en 1886, para los grupos finitos [*327* d]; en teoría de Galois, la dualidad entre subgrupos y subcuerpos toma forma en Dedekind y Hilbert; y la ortogonalidad entre subespacios vectoriales procede visiblemente, en primer lugar, de la dualidad entre variedades lineales en Geometría proyectiva, y también de la noción y de las propiedades de las variedades completamente ortogonales en un espacio euclídeo o un espacio de Hilbert (de ahí su nombre). Todas estas direcciones se unen en la época contemporánea en manos de algebristas como E. Noether, Artin, y Hasse, y de topólogos como Pontrjagin y Whitney, no sin una serie de influencias mutuas entre unos y otros.

Se efectúa al mismo tiempo un examen crítico, destinado a eliminar en cada punto las hipótesis no estrictamente indispensables, y, sobre todo, las que cerraban el camino a ciertas aplicaciones. Surgió así la posibilidad de sustituir los cuerpos por anillos en la definición de espacio vectorial, y, creando la noción general de módulo, estudiar

[3] Se trata de los espacios vectoriales normados completos sobre el cuerpo de los números reales o sobre el de los complejos.

simultáneamente estos espacios, los grupos abelianos, los módulos particulares ya estudiados por Kronecker, Weierstrass, Dedekind y Steinitz, e incluso, los grupos con operadores, y aplicarles, por ejemplo, el teorema de Jordan-Hölder. Se lleva a cabo al mismo tiempo, mediante la distinción entre módulo a la derecha y módulo a la izquierda, el paso al caso no conmutativo, al que conducía también el desarrollo moderno de la teoría de las álgebras por la escuela americana (Wedderburn, Dickson) y, sobre todo, por la alemana (E. Noether, Artin).

Finalmente aparece, en una fecha reciente, la última de las tendencias que vamos a mencionar aquí: contenida ya en germen en el teorema de Dedekind ([*79*], vol. III, p. 29), según el cual un conjunto cualquiera de automorfismos de un cuerpo conmutativo es siempre linealmente independiente, la linealización de la teoría de Galois es realizada por Artin [*7* a], y se generaliza pronto a las extensiones cualesquiera de los cuerpos conmutativos, e incluso, a las extensiones de los cuerpos no conmutativos ([*172* d], cap. VII).

también que el Algebra lineal así entendida se aplica igualmente a un cuerpo de base comutativo cualquiera.

Por otro lado, con la introducción por Banach, en 1922, de los espacios que llevan su nombre[3], aparecen, bien es cierto que en un problema tan topológico como algebraico, espacios no isomorfos a su dual (ver pp. 295-298). Ya no existe un isomorfismo «canónico», es decir, determinado por la estructura, entre un espacio vectorial de dimensión finita y su dual, lo que se reflejaba desde hacía mucho tiempo en la distinción entre covariante y contravariante. Sin embargo, parece que no puede dudarse de que la distinción entre un espacio y su dual solo aparece claramente después de los trabajos de Banach y de su escuela, son también estos trabajos los que hacen resaltar el interés de la noción de codimensión. En cuanto a la dualidad u «ortogonalidad» entre los subespacios de un espacio vectorial y los de su dual, la manera como se formula hoy presenta una analogía que no es meramente exterior con la formulación moderna del teorema principal de la teoría de Galois, y con la llamada dualidad de Pontrjagin en los grupos abelianos localmente compactos; ésta se remonta a Weber, que, con ocasión de algunos trabajos en aritmética, sienta las bases, en 1886, para los grupos finitos [*327* d]; en teoría de Galois, la dualidad entre subgrupos y subcuerpos toma forma en Dedekind y Hilbert; y la ortogonalidad entre subespacios vectoriales procede visiblemente, en primer lugar, de la dualidad entre variedades lineales en Geometría proyectiva, y también de la noción y de las propiedades de las variedades completamente ortogonales en un espacio euclídeo o un espacio de Hilbert (de ahí su nombre). Todas estas direcciones se unen en la época contemporánea en manos de algebristas como E. Noether, Artin, y Hasse, y de topólogos como Pontrjagin y Whitney, no sin una serie de influencias mutuas entre unos y otros.

Se efectúa al mismo tiempo un examen crítico, destinado a eliminar en cada punto las hipótesis no estrictamente indispensables, y, sobre todo, las que cerraban el camino a ciertas aplicaciones. Surgió así la posibilidad de sustituir los cuerpos por anillos en la definición de espacio vectorial, y, creando la noción general de módulo, estudiar

[3] Se trata de los espacios vectoriales normados completos sobre el cuerpo de los números reales o sobre el de los complejos.

simultáneamente estos espacios, los grupos abelianos, los módulos particulares ya estudiados por Kronecker, Weierstrass, Dedekind y Steinitz, e incluso, los grupos con operadores, y aplicarles, por ejemplo, el teorema de Jordan-Hölder. Se lleva a cabo al mismo tiempo, mediante la distinción entre módulo a la derecha y módulo a la izquierda, el paso al caso no conmutativo, al que conducía también el desarrollo moderno de la teoría de las álgebras por la escuela americana (Wedderburn, Dickson) y, sobre todo, por la alemana (E. Noether, Artin).

Finalmente aparece, en una fecha reciente, la última de las tendencias que vamos a mencionar aquí: contenida ya en germen en el teorema de Dedekind ([*79*], vol. III, p. 29), según el cual un conjunto cualquiera de automorfismos de un cuerpo conmutativo es siempre linealmente independiente, la linealización de la teoría de Galois es realizada por Artin [*7* a], y se generaliza pronto a las extensiones cualesquiera de los cuerpos conmutativos, e incluso, a las extensiones de los cuerpos no conmutativos ([*172* d], cap. VII).

POLINOMIOS Y CUERPOS CONMUTATIVOS

La teoría de los cuerpos conmutativos —y la teoría de los polinomios, estrechamente relacionada con ella— proceden directamente de lo que ha constituido, hasta mediados del siglo XIX, el objeto principal del Algebra clásica: la resolución de las ecuaciones algebraicas, y de los problemas de construcciones geométricas que constituyen su equivalente.

Desde el momento en que se intenta resolver una ecuación algebraica de grado > 1, aparecen nuevas dificultades de cálculo, puesto que la determinación de la incógnita ya no puede realizarse mediante cálculos «racionales» a partir de los datos. Esta dificultad debió aparecer muy pronto, y hay que considerar como una de las contribuciones más importantes de los babilonios el hecho de que supieran reducir la solución de las ecuaciones cuadráticas y bicuadradas a una única operación algebraica nueva, la extracción de raíces cuadradas (como lo demuestran las numerosas ecuaciones numéricas que encontramos resueltas de esta manera en los textos que nos han llegado ([*232*], pp. 183-193)). En lo referente al cálculo formal, la Antigüedad no rebasó nunca este punto en el problema de la resolución de las ecuaciones algebraicas. En efecto, los griegos de la época clásica se limitaron a volver a encontrar las fórmulas babilonias en

términos geométricos, y su empleo en forma algebraica no se encuentra hasta Herón (100 d. de J. C.) y Diofanto.

Es en otra dirección muy diferente en la que los griegos realizan un progreso decisivo. Estamos mal informados acerca de la forma en que los babilonios concebían y calculaban las raíces cuadradas de los números enteros que no eran cuadrados perfectos[1]; en los escasos textos que nos han llegado sobre la cuestión parecen conformarse con métodos de aproximación bastante groseros ([*232*], pp. 33-38). La escuela pitagórica, que había fijado con rigor la idea de magnitudes conmensurables, atribuyéndoles un carácter casi religioso, no podía mantener este punto de vista, y probablemente fuese el fracaso de los intentos sucesivos de expresar racionalmente $\sqrt{2}$ lo que les llevase finalmente a demostrar que este número es irracional[2].

Más adelante indicaremos (cf. p. 203) cómo este descubrimiento, que supone un giro capital en la historia de las Matemáticas, influyó profundamente sobre la concepción de «número» en los griegos, y les llevó a crear un álgebra de carácter exclusivamente geométrico para hallar una forma de representación (o quizá una prueba de existencia) para las razones inconmensurables, que se negaban a considerar como números. En el caso más corriente, un problema algebraico se reduce de este modo a la intersección de dos curvas planas auxiliares, convenientemente elegidas, o a varias determinaciones sucesivas de dichas intersecciones. Algunas tradiciones tardías y de dudosa autoridad hacen llegar hasta Platón la introducción de una primera clasificación de estas construcciones, destinadas a una larga y brillante carrera; parece que, debido a razones más de orden filosófico que matemático, habría separado las construcciones llamadas «con regla y compás», es decir, aquéllas en las que solo apa-

[1] En todos los ejemplos de ecuaciones cuadráticas y bicuadradas de los textos babilonios, los datos están siempre elegidos de tal manera que los radicales se refieren a cuadrados.

[2] Un autor reciente ha hecho la observación ingeniosa de que la construcción del pentágono regular estrellado, conocida por los pitagóricos (de los que constituía uno de sus símbolos místicos) conduce inmediatamente a una demostración de la irracionalidad de $\sqrt{5}$ y ha lanzado la hipótesis (desgraciadamente no apoyada en ningún texto) de que los pitagóricos habrían descubierto de este modo los números irracionales [*323*].

recen rectas y circunferencias como curvas auxiliares[3]. En todo caso, Euclides, en sus Elementos [*107*], se limita exclusivamente a tratar problemas que pueden resolverse de esta manera (aunque sin caracterizarlos con un nombre especial), circunstancia que contribuyó no poco a fijar sobre ellos la atención de los matemáticos de los siglos siguientes. Pero hoy día sabemos[4], que las ecuaciones algebraicas que pueden resolverse por medio «de la regla y el compás» son de un tipo muy especial; en particular, una ecuación irreducible de tercer grado (sobre el cuerpo de los racionales) no puede resolverse de este modo, y los griegos habían encontrado muy pronto problemas de tercer grado que se han hecho célebres, como el de la duplicación del cubo (resolución de $x^3 = 2$) y la trisección del ángulo; por otra parte, la cuadratura del círculo les ponía ante un problema trascendente. Para resolver estos problemas les vemos introducir numerosas curvas algebraicas (cónicas, cisoide de Diocles, concoide de Nicomedes) o trascendentes (cuadratriz de Dinostrato, espiral de Arquímedes), lo que no podía por menos de llevarles a un estudio autónomo de estas distintas curvas, preparando así el camino a la

[3] En relación con este principio, se atribuye también a Platón la clasificación de las curvas planas en «lugares planos» (recta y círculo) y «lugares sólidos» (las cónicas, obtenidas mediante la sección plana de un cuerpo sólido, el cono), quedando agrupadas todas las otras curvas bajo el nombre de «τὸποι γραμμικοὶ». Resulta curioso observar cómo la influencia de esta clasificación se ejerce todavía sobre Descartes, que, en su Geometría, sitúa en el mismo «género» las ecuaciones de grado $2n - 1$ y de grado $2n$, sin duda porque las de grado 1 o 2 se resuelven mediante intersecciones de «lugares planos» y las de grado 3 o 4 mediante intersecciones de «lugares sólidos» ([*85* a], t. VI, p. 392-393).

[4] La determinación de los puntos de intersección de una recta y de un círculo (o de dos círculos) equivale a la resolución de una ecuación de segundo grado cuyos coeficientes son funciones racionales de los coeficientes de la ecuación de la recta y de la del círculo (o de los dos círculos) considerados. Se obtiene fácilmente a partir de aquí que las coordenadas de un punto construido «con regla y compás» a partir de puntos dados pertenecen a una extensión L del cuerpo **Q** de los números racionales, obtenida de la manera siguiente: si K es el cuerpo obtenido añadiendo a **Q** las coordenadas de los puntos dados, existe una sucesión creciente $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ de cuerpos intermedios entre K y L, verificando las condiciones $K = L_0$, $L = L_n$, $[L_i : L_{i-1}] = 2$ para $1 \leq i \leq n$. Por inducción sobre n se deduce que el grado sobre K de la extensión de Galois N engendrada por L es una *potencia* de 2; recíprocamente, se puede demostrar que, si se verifica esta condición, existe una sucesión (L_i) de cuerpos intermedios entre K y L con las propiedades anteriores, y por tanto el problema propuesto puede resolverse con la regla y el compás (cf. [*312*], pp. 351-366).

Geometría analítica, la Geometría algebraica y el Cálculo infinitesimal. Pero estos métodos no representaron ningún progreso en la resolución de ecuaciones algebraicas[5] y la única obra de la Antigüedad que supuso una contribución notable a este problema, y que ejerció una influencia duradera sobre los algebristas de la Edad Media y del Renacimiento es el Libro X de los Elementos de Euclides [*107*]. En este Libro (cuyos resultados principales se remontarían a Theeteto, según algunos historiadores), Euclides considera expresiones obtenidas mediante la combinación de varios radicales, tales como $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ (a y b racionales), da condiciones para que estas expresiones sean irracionales, las clasifica en numerosas categorías (y demuestra que dichas categorías son efectivamente distintas) y estudia las relaciones algebraicas entre estos irracionales, tales como la que hoy escribiríamos

$$\sqrt{\sqrt{p}+\sqrt{q}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{p}+\sqrt{p-q})} + \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{p}-\sqrt{p-q})}\ ;$$

expresándolo todo en el lenguaje geométrico habitual de los *Elementos*, lo que hace que la exposición resulte especialmente farragosa e incómoda.

Después de la decadencia de las matemáticas griegas clásicas, las concepciones relativas a las ecuaciones algebraicas se van modificando. No hay duda de que, durante todo el periodo clásico, los griegos poseían métodos de aproximación indefinida de las raíces cuadradas, sobre los que desgraciadamente estamos mal informados[6].

[5] Careciendo de un cálculo algebraico manejable, no se encuentra en los griegos ningún indicio de un intento de clasificación de los problemas que no sabían resolver mediante la regla y el compás; los árabes son los primeros en reducir numerosos problemas de este tipo (por ejemplo, la construcción de los polígonos regulares de 7 y 9 lados) a ecuaciones de tercer grado.

[6] Por ejemplo, el método de Arquímedes para el cálculo aproximado del número π precisa el conocimiento de varias raíces cuadradas, con una aproximación bastante grande, pero ignoramos el procedimiento empleado por Arquímedes para obtener estos valores. El método de aproximación de $\sqrt{2}$ proporcionado por el desarrollo de este número en «fracción continua» es conocido (en forma geométrica) por un texto de Theón de Smirna (siglo II d. C.), pero se remonta tal vez a los primeros pitagóricos. En lo que se refiere al método de aproximación indefinida de las raíces

En los indios, y después en los árabes y sus seguidores occidentales de la Edad Media, la extracción de raíces de todos los órdenes se convierte en una operación que tiende a ser considerada como fundamental con la misma importancia de las operaciones racionales del álgebra, y a ser representada, como éstas, por símbolos cada vez más sencillos de manejar en los cálculos[7]. La teoría de la ecuación de segundo grado, que se perfecciona durante toda la Edad Media (número de raíces, raíces negativas, caso imposible, raíz doble) y la de las ecuaciones bicuadradas, proporcionan modelos de fórmulas de resolución de ecuaciones «por radicales», a partir de las cuales los algebristas van a intentar durante siglos obtener fórmulas parecidas para la resolución de ecuaciones de grado superior, y, en primer lugar, para la ecuación de tercer grado. Leonardo de Pisa, principal introductor de la ciencia árabe en Occidente en el siglo XIII, reconoce que los irracionales considerados por Euclides en su Libro X no sirven para este fin (una nueva demostración de imposibilidad en una teoría llena de ellas), e intenta cálculos análogos con raíces cúbicas, obteniendo relaciones como

$$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{250},$$

similares a las fórmulas de Euclides para las raíces cuadradas (y de las que pueden hallarse ejemplos anteriores en los árabes). Pero todavía fueron necesarios tres siglos de esfuerzos infructuosos antes de que Escipión del Ferro, a principios del siglo XVI, llegase finalmente, para la ecuación $x^3 + ax = b$, a la fórmula de resolución[8]

$$(1)\qquad x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

cuadradas que todavía se emplea en nuestros días en la enseñanza elemental, no se encuentra antes de Theón de Alejandría (siglo IV d. C.), aunque sin duda fuese ya conocido por Tolomeo. Señalemos por último que en Herón (hacia 100 d. C.) se encuentra un cálculo aproximado de una raíz cúbica [*103*].

[7] La irracionalidad de $\sqrt[n]{a}$, cuando a es un entero que no es una potencia n-ésima exacta, no es mencionada ni demostrada antes de Stifel (siglo XVI); la demostración de este último ([*298*], f. 103) está además calcada sobre la de Euclides para $n = 2$, y es bastante poco verosímil que esta fácil generalización no fuese observada antes.

[8] Si se tiene $x = y + z$ con la condición $yz = -a/3$, se obtiene $y^3 + z^3 = b$ y $y^3z^3 = -(a/3)^3$, de aquí y^3 y z^3.

No podemos detenernos aquí a contar la parte pintoresca de este sensacional descubrimiento —y las querellas que provocó entre Tartaglia por una parte y Cardano y su escuela por otra— ni las figuras, muchas veces atrayentes, de los sabios que participaron en él. Pero hay que señalar los progresos decisivos en la teoría de ecuaciones a que dio lugar por parte de Cardano y sus discípulos. Cardano, que muestra menos repugnancia a usar números negativos que la mayoría de sus contemporáneos, observa que las ecuaciones de tercer grado pueden tener tres raíces, y las bicuadradas, cuatro ([*50*], t. IV, p. 259), y señala que la suma de las tres raíces de $x^3 + bx = ax^2 + c$ (ecuación en la que además sabe suprimir el término en x^2) es siempre igual a a (*ibid.*). Guiado sin duda por esta relación, y por la intuición de su carácter general, tiene la primera idea de la noción de multiplicidad de una raíz; y, sobre todo, se atreve, no sin precauciones oratorias, a hacer cálculos formales con expresiones conteniendo raíces cuadradas de números negativos. Es verosímil que le impulsara a ello el hecho de que dichas expresiones aparecen naturalmente en el empleo de la fórmula (1) cuando $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 < 0$ (caso llamado «irreducible», en el que Cardano había visto la existencia de tres raíces reales); en todo caso, esto aparece claramente en su discípulo R. Bombelli, que en su Algebra ([*28* a], p. 293) demuestra la relación

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$

y se preocupa de indicar explícitamente las reglas de cálculo con números complejos en una forma muy próxima a las exposiciones modernas[9]. Finalmente, en 1545, otro discípulo de Cardano, L. Ferrari, consigue resolver la ecuación general de cuarto grado empleando una ecuación auxiliar de tercero[10].

[9] Bombelli ([*28* a], pp. 169 y 190) considera los números complejos como «combinaciones lineales» con coeficientes positivos, de cuatro elementos básicos: «piu» $(+1)$, «meno» (-1), «piu de meno» $(+i)$ y «meno de meno» $(-i)$, y enuncia además como axioma que «piu» y «piu de meno» no se suman, primera aparición de la noción de independencia lineal.

[10] Una vez pasada la ecuación a la forma $x^4 = ax^2 + bx + c$, se determina un número z de tal modo que el segundo miembro de la ecuación

$$(x^2 + z)^2 = (a + 2z)x^2 + bx + (c + z^2)$$

Después de un avance tan rápido, el periodo siguiente, hasta mediados del siglo XVIII, solamente sirvió para que se desarrollasen las nuevas ideas introducidas por la escuela italiana. Gracias a los progresos esenciales que lleva a cabo en la notación algebraica, Viète puede expresar de modo general las relaciones entre los coeficientes y las raíces de una ecuación algebraica, al menos cuando todas las raíces son positivas[11] ([*319*], p. 158). Más atrevido, A. Girard [*129*] no duda en afirmar, aunque desde luego sin demostrarlo, que una ecuación de grado *n* tiene exactamente *n* raíces, siempre que se cuenten las raíces «imposibles», cada una con su grado de multiplicidad, y que estas raíces satisfacen las relaciones enunciadas por Viète, obteniendo también, por primera vez, la expresión de las sumas de las potencias semejantes de las raíces, hasta el exponente 4.

Pero las preocupaciones del siglo XVII van en otras direcciones, y si el Algebra obtiene algún beneficio de los nuevos avances de la Geometría analítica y del Cálculo infinitesimal es solamente de rechazo. Así, del método de Descartes para obtener las tangentes a una curva algebraica (cf. p. 243) procede el criterio de multiplicidad de una raíz de una ecuación algebraica, enunciado por su discípulo Hudde ([*85* b], t. I, pp. 433 y 507-509). Y sin duda se debe también a la influencia de Descartes la distinción entre funciones algebraicas y funciones trascendentes, paralela a la introducida en su *Geometría* entre las curvas «geométricas» y las curvas «mecánicas» (cf. pp. 241 y 266). En todo caso, esta distinción aparece con toda claridad en J. Gregory, que intenta incluso demostrar, en 1667, que el área de un sector circular no puede ser función algebraica de la cuerda y del radio ([*136* a]; cf. [*155*]). La expresión «trascendente» es de Leibniz, al que estos problemas de clasificación no dejaron de interesar durante toda su carrera, y que, hacia 1682, encuentra una demostración sencilla del resultado buscado por Gregory,

sea un cuadrado perfecto, lo que nos da para z una ecuación de tercer grado.

[11] Viète, admirador apasionado de los antiguos, se abstiene sistemáticamente de introducir números negativos en sus razonamientos, pero no por ello es menos capaz, si es necesario, de expresar en su lenguaje relaciones entre los coeficientes y las raíces cuando éstas son negativas, por ejemplo, si la ecuación $x^3 + b = ax$ tiene dos raíces positivas x_1, x_2 ($a > 0$, $b > 0$), Viète demuestra que $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = a$ y $x_1x_2(x_1 + x_2) = b$ ([*319*], p. 106).

demostrando que sen x no puede ser función algebraica de x ([*198* a], t. V, pp. 97-98)[12]. Es además, junto con su amigo Tschirnhaus, uno de los pocos matemáticos de su época que se preocupa todavía del problema de la resolución «por radicales» de las ecuaciones algebraicas. En sus comienzos, le vemos estudiar el «caso irreducible» de la ecuación de tercer grado, y convencerse (sin tener motivos para ello) de la imposibilidad de evitar en tal caso la aparición de cantidades imaginarias en las fórmulas de resolución ([*198* d], pp. 547-564). En esta misma época intenta infructuosamente la resolución mediante radicales de la ecuación de quinto grado, y cuando, más tarde, Tschirnhaus pretende resolver el problema haciendo desaparecer todos los términos de la ecuación excepto los dos extremos por medio de una transformación de la forma $y = P(x)$, donde P es un polinomio de cuarto grado convenientemente elegido, Leibniz se da cuenta rápidamente de que las ecuaciones que determinan los coeficientes de $P(x)$ son de grado > 5, y considera que el método está destinado al fracaso ([*198* d], pp. 402-403).

Parecen haber sido las necesidades del nuevo Análisis las que hicieran reavivarse el interés por el Algebra. La integración de las fracciones racionales, realizada por Leibniz y Juan Bernoulli, y la cuestión de los logaritmos imaginarios, estrechamente relacionada con ella, dieron ocasión a profundizar en el cálculo con números imaginarios, y a volver a considerar el problema de la descomposición de un polinomio en factores de primer grado («teorema fundamental del álgebra»)[13]. Ya a principios del siglo XVIII, Cotes y de Moivre reducen la resolución de la ecuación $x^n - 1 = 0$ a la división

[12] La definición que da Leibniz de las «cantidades trascendentes» ([*198* a], t. V, p. 228; véase también *ibid*, p. 120), parece aplicarse más bien a funciones que a números (en lenguaje moderno, lo que él hace viene a ser definir los elementos trascendentes sobre el cuerpo obtenido añadiendo al cuerpo de los números racionales los datos del problema), parece verosímil sin embargo considerar que tenía una noción bastante clara de los números trascendentes (aunque estos últimos no parecen haber sido definidos de forma precisa antes de finales del siglo XVIII), en cualquier caso observa explícitamente que una función trascendente puede tomar valores racionales para valores racionales de la variable, y por consiguiente que su demostración de la trascendencia de sen x no basta para probar que π es irracional ([*198* a], t. V, pp. 97 y 124-126).

[13] El estado rudimentario en que se encontraba todavía el cálculo con los números complejos se percibe bien claramente cuando se ve a Leibniz (sin embargo uno de los matemáticos de su tiempo más ejercitados en esta técnica) expresarse como si no fuese

de la circunferencia en n partes iguales; por tanto, para obtener la expresión de sus raíces «por radicales», basta saber hacerlo cuando n es primo impar, y de Moivre señala que la sustitución $y = x + \frac{1}{x}$ reduce entonces el problema a la resolución de una ecuación de grado $(n-1)/2$ «por radicales». En lo que se refiere al «teorema fundamental», después de los repetidos fracasos en los intentos de resolución general «por radicales» (incluyendo varias tentativas de Euler ([*108* a] (1), t. VI, pp. 1-19 y 170-196)), empiezan a buscarse demostraciones *a priori*, sin emplear fórmulas explícitas de resolución. Sin entrar en los detalles de los métodos propuestos (que debían culminar en las demostraciones de Lagrange y Gauss; cf. pp. 129 y 219), conviene señalar aquí el punto de vista desde el que se considera el problema a mediados del siglo XVIII: se admite (sin ninguna justificación, aparte de un confuso sentimiento de generalidad, procedente sin duda, como en A. Girard, de la existencia de relaciones entre los coeficientes y las raíces) que una ecuación de grado n posee siempre n raíces «ideales», con las que puede calcularse como con los números, pero *sin saber si son números* (reales o complejos), y lo que se trata de demostrar (realizando cálculos con las raíces ideales según sean necesarios) es que una al menos de estas raíces es un número complejo ordinario[14]. Bajo esta forma defectuosa puede reconocerse el primer germen de la idea general de «adjunción formal», que, pese a las objeciones de Gauss ([*124* a], t. III, p. 1), se convertiría en la base de la teoría moderna de los cuerpos conmutativos.

Con las memorias fundamentales de Lagrange ([*191*], t. III, pp. 205-421) y de Vandermonde [*315*], el año 1770 ve cómo se abre un periodo nuevo y decisivo en la historia de la teoría de las ecuaciones algebraicas. Al empirismo de los intentos más o menos felices de hallar fórmulas de resolución que había reinado hasta entonces, va a suceder un análisis sistemático de los problemas planteados y

posible descomponer $x^4 + 1$ en dos factores reales de segundo grado ([*198* a], t. V, pp. 359-360).

[14] Debe hacerse notar que lo que los matemáticos del siglo XVIII llaman «raíces imaginarias» no son muchas veces otra cosa que las raíces «ideales» anteriores, e intentan demostrar que estas raíces son de la forma $a + b\sqrt{-1}$ (ver por ejemplo [*191*], t. III, p. 479).

de los métodos susceptibles de resolverlos, análisis que conducirá sesenta años después a los resultados definitivos de Galois. Ambos, Lagrange y Vandermonde, parten de la ambigüedad introducida por las determinaciones múltiples de los radicales en las fórmulas de resolución de las ecuaciones de grado ≤ 4; este hecho había atraído la atención de Euler ([*108* a] (1), t. VI, pp. 1-19) que, entre otros, había demostrado cómo en la fórmula de del Ferro las determinaciones de los radicales que aparecen deben asociarse de tal modo que resulten tres raíces y no nueve[15]. Lagrange señala que cada uno de los radicales cúbicos de la fórmula de del Ferro puede escribirse en la forma $\frac{1}{3}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)$, siendo ω una raíz cúbica de la unidad, y x_1, x_2 y x_3 las tres raíces de la ecuación considerada tomadas en un cierto orden, y hace la observación fundamental de que la función $(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3$ de las tres raíces solamente puede tomar *dos* valores distintos para *toda* permutación de las tres raíces, lo que explica *a priori* el éxito de los métodos de resolución de esta ecuación. Un análisis similar de los métodos de resolución de la ecuación de cuarto grado le lleva a la función $x_1x_2 + x_3x_4$ de las cuatro raíces, que toma solamente *tres* valores distintos para cada permutación de las raíces, y por tanto es raíz de una ecuación de tercer grado, cuyos coeficientes son funciones racionales de los de la ecuación dada[16]; estos hechos vienen a constituir, dice Lagrange, «*los verdaderos principios, y, por así decirlo, la metafísica*[17] *de la resolución de ecuaciones de tercero y cuarto grado*» ([*191*], t. III, p. 357). Basándose en estos ejemplos se propone el estudio general, para una ecuación de grado n del número ν de valores[18] que puede tomar una función racional V de las n raíces

[15] Véase nota 8 de la página 104; se debe tener $yz = -a/3$.

[16] Waring hace también esta observación en sus *Meditationes algebraicae* (Meditaciones algebraicas) aparecidas este mismo año 1770, pero está muy lejos de sacar de ella las mismas consecuencias que Lagrange.

[17] Bajo esta palabra, que aparece tan a menudo entre los autores del siglo XVIII, podría verse una primera intuición (aunque muy vaga) de la concepción moderna de *estructura*.

[18] Lagrange hace ya la distinción entre las distintas *fracciones racionales* que obtiene a partir de V mediante la permutación de las indeterminadas x_i $(1 \leq i \leq n)$ y los distintos valores que toman estas fracciones cuando las x_i son las raíces de una ecuación algebraica con coeficientes numéricos dados, pero su exposición es todavía algo «flotante», y la citada distinción solamente se hará más clara con Galois.

cuando se permutan éstas arbitrariamente, inaugurando en realidad de este modo (bajo esta terminología estrechamente ligada a la teoría de ecuaciones) la teoría de grupos y la de cuerpos, obteniendo ya varios resultados fundamentales por los mismos métodos empleados hoy. Demuestra por ejemplo que el número ν es un divisor de $n!$ usando el mismo razonamiento que se emplea hoy para demostrar que el orden de un subgrupo de un grupo finito es un divisor del orden del grupo. Más importante aún es el teorema en que demuestra que si V_1 y V_2 son dos funciones racionales de las raíces tales que V_1 y V_2 permanecen invariantes por las mismas permutaciones, cada una de ellas es función racional de la otra y de los coeficientes de la ecuación (caso particular del teorema de Galois que caracteriza una subextensión de una extensión de Galois como el cuerpo de invariantes de su grupo de Galois): «*Este problema* —dice— *me parece uno de los más importantes de la teoría de ecuaciones, y la solución general que vamos a dar de él servirá para arrojar nueva luz sobre esta parte del Algebra*» ([*191*], t. III, p. 374).

Todos estos trabajos son naturalmente, en la mente de Lagrange, pasos previos para el análisis de los posibles métodos de resolución de las ecuaciones algebraicas por reducción sucesiva a ecuaciones de grado menor, estando ligado este método, como demuestra, a la formación de funciones racionales de las raíces tomando menos de n valores al permutarse las raíces. Guiado sin duda por sus resultados sobre la ecuación de tercer grado, introduce en el caso general los «resolventes de Lagrange» $y_k = \sum_{h=1}^{n} \omega_k^h x_h$, donde ω_k es una raíz n-ésima de la unidad ($1 \leq k \leq n$), muestra con toda claridad que el conocimiento de estos n números implica el de las raíces x_k, y busca en el caso general el grado de la ecuación que satisfacen los y_k; demuestra por ejemplo que si n es primo, los y_k son raíces de una ecuación de grado $n - 1$, cuyos coeficientes son funciones racionales de una raíz de una ecuación de grado $(n - 2)!$ cuyos coeficientes se expresan racionalmente mediante los coeficientes de la ecuación dada. «*Estos son, si no me equivoco* —concluye— *los verdaderos principios de la resolución de ecuaciones, y el análisis más adecuado para llevar a ella; como se ve, todo se reduce a una especie de cálculo de combinaciones, por medio del cual encontramos* a priori *los resultados que se esperan*» ([*191*], t. III, p. 403).

En lo referente a la memoria de Vandermonde, independiente de la de Lagrange, tiene numerosos puntos comunes con ésta, sobre todo en lo relativo a la idea de buscar funciones racionales de las raíces tomando el mínimo de valores distintos al permutarse las raíces[19], y el estudio de los «resolventes de Lagrange», que también introduce con este fin. Su trabajo está lejos de tener la claridad y la generalidad del de Lagrange; hay, sin embargo, un punto en el que va mucho más lejos, al aplicar las mismas ideas a la ecuación de la división de la circunferencia $x^n - 1 = 0$ para n primo impar. En tanto que Lagrange se contenta con recordar que esta ecuación se reduce a una ecuación de grado $m = (n - 1)/2$ con coeficientes racionales, sin intentar resolverla para $n \geq 11$, Vandermonde afirma que las potencias m-ésimas de las resolventes de Lagrange de esta ecuación son racionales, debido a las relaciones entre las distintas raíces de $x^n - 1 = 0$, pero se limita a justificar esta afirmación en el caso $n = 11$, sin hacerlo en el caso general.

El resultado anunciado por Vandermonde solamente fue demostrado por completo treinta años más tarde por Gauss[20]. Sus resultados fundamentales sobre la ecuación $x^n - 1 = 0$ (n primo impar) se insertan en el programa general de sus memorables trabajos aritméticos ([*124* a], t. I, pp. 413 ss.), y muestran sobre todo su dominio en el manejo de lo que hoy llamamos la teoría de los grupos cíclicos. Después de haber demostrado que el polinomio $\Phi_n(x) = (x^n - 1)/(x - 1)$ es irreducible si n es primo impar[21] tiene la idea de escribir sus $n - 1$ raíces en la forma $\zeta^{g^k} = \zeta_k$ ($0 \leq k \leq n - 2$),

[19] En este trabajo (que de hecho solo desarrolla para una ecuación de quinto grado) aparece por primera vez la noción de *imprimitividad* ([*315*], pp. 390-391). Además, se siente de un modo natural la tentación de poner en relación los métodos de Lagrange y Vandermonde con sus trabajos de la misma época sobre los determinantes, que debían haberles familiarizado con la idea de permutación y todo lo relacionado con ella.

[20] Gauss no cita a Vandermonde en sus *Disquisitiones*, pero es muy verosímil que hubiese leído la memoria de éste último (cf. [*124* a], t. X_2, Abh. 4, p. 58).

[21] La noción de polinomio irreducible (con coeficientes racionales) se remonta al siglo XVII, y ya Newton y Leibniz habían dado procedimientos que permitían determinar (al menos teóricamente) los factores irreducibles de un polinomio con coeficientes racionales explícitos ([*198* a], t. IV, pp. 329 y 355), pero la demostración de Gauss es la primera demostración de irreducibilidad que se aplica a todo un *conjunto* de polinomios de grado arbitrariamente grande.

siendo g una raíz primitiva de la congruencia $z^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ (lo que, en lenguaje moderno, equivale a decir que el grupo Γ de la ecuación $\Phi_n(x) = 0$ es cíclico). A cada divisor e de $n - 1$ le hace corresponder los $f = (n - 1)/e$ «periodos» $\eta_\nu = \xi_\nu + \xi_{\nu+f} + \xi_{\nu+2f} + \ldots + \xi_{\nu+(e-1)f}$ $(1 \leq \nu \leq f)$ y demuestra sustancialmente que las combinaciones lineales con coeficientes racionales de los η_ν forman un cuerpo, engendrado por uno cualquiera de los f periodos η_ν y de grado f sobre el cuerpo de los números racionales (este cuerpo corresponde naturalmente al subgrupo de Γ de orden e). No podemos entrar aquí en los detalles de su análisis ni en el de las importantes consecuencias aritméticas que supone, señalaremos solamente que obtiene de este modo el célebre teorema sobre la posibilidad de construir «con regla y compás» los polígonos cuyo número de lados sea igual a un número primo de la forma $2^{2^k} + 1$[22]. En cuanto a la resolución por radicales de la ecuación $\Phi_n(x) = 0$, se obtiene fácilmente aplicando la teoría de los periodos a la potencia f-ésima de una resolvente de Lagrange $\sum_{\nu=0}^{f-1} \omega^\nu \eta_\nu$ (siendo $\omega^f = 1$)[23].

De Lagrange proceden directamente los trabajos de su compatriota Ruffini [*265*], contemporáneos de las *Disquisitiones*; continuando a partir del lugar en que había terminado Lagrange, se propone en sus trabajos demostrar la imposibilidad de la resolución «por radicales» de la ecuación «general»[24] de quinto grado.

[22] Gauss afirma explícitamente poseer una demostración del hecho de que este caso es el único en el que se puede construir con la regla y el compás un polígono con un número primo impar de lados ([*124* a], t. I, p. 462), pero esta demostración no fue nunca publicada y no ha sido encontrada entre sus papeles.

[23] En realidad, si se quiere probar únicamente que la ecuación es resoluble por radicales, puede uno limitarse a tomar $e = 1$ razonando por inducción sobre n.

[24] Los matemáticos del siglo XIX entendían por tal (en sustancia) una ecuación cuyos coeficientes son *indeterminadas* sobre el cuerpo de los racionales. Pero la noción moderna de indeterminada no se pone en evidencia antes de los últimos años del siglo XIX; hasta aquí se entiende siempre por «polinomio» o «fracción racional» una *función* de variables complejas. Una ecuación algebraica «general» es concebida como una ecuación cuyos coeficientes son variables complejas independientes, y cuyas raíces son «funciones algebraicas» de estas variables —noción en realidad totalmente desprovista de sentido si se da a la palabra «función» su sentido actual—. Desde luego que los razonamientos sobre estas «funciones algebraicas» son en general intrínsecamente correctos, como puede comprobarse al traducirlos al lenguaje algebraico moderno.

La demostración de Ruffini, oscura y prolija, es incompleta, aun a pesar de haber sido retocada varias veces, pero está ya muy cerca de la demostración (en principio correcta) que obtendría más tarde Abel[25]. Su interés principal reside fundamentalmente en la introducción del cálculo con las sustituciones y de las primeras nociones de la teoría de grupos, que Ruffini desarrolla para demostrar que no existe ninguna función de las cinco raíces de la ecuación que tome más de 2 y menos de 5 valores cuando se permutan arbitrariamente las raíces.

Ya hemos dicho (véase p. 80) cómo esta primera idea de los grupos de permutaciones fue desarrollada y sistematizada por Cauchy algunos años después. Pero, si bien las nociones necesarias para el desarrollo de las ideas de Lagrange habían ido aclarándose poco a poco en lo que se refiere a las sustituciones, seguía siendo necesario plantear con igual claridad los primeros principios de la teoría de cuerpos. Esto es lo que le había faltado a Ruffini, y lo que realizarían Abel y Galois, en la última fase del problema de la resolución de las ecuaciones algebraicas.

A lo largo de su corta vida, Abel no dejó nunca de estar preocupado por este problema. Siendo casi un niño, había creído encontrar una fórmula de resolución por radicales de la ecuación general de quinto grado. Habiéndose dado cuenta más tarde de su error, no cesa de trabajar hasta que consigue demostrar que dicha fórmula no existe ([*1*], t. I, p. 66). Pero no se detiene aquí. Mientras que su competidor Jacobi desarrolla la teoría de las funciones elípticas en tanto que analista, el punto de vista algebraico domina en los trabajos de Abel sobre la cuestión, centrados en la teoría de las ecuaciones de la división de las funciones elípticas ([*1*], t. I, pp. 265, 377 y *passim*). De este modo obtiene nuevos tipos de ecuaciones resolubles por radicales siguiendo un método calcado del de Gauss para la resolución de las ecuaciones de la división de la circunferencia ([*1*], t. I, pp. 310 y 358)[26], resultado a partir del cual se eleva a la concep-

[25] Los artículos de Ruffini han sido minuciosamente analizados en [*43*].

[26] Gauss había indicado ya, en sus *Disquisitiones*, la posibilidad de generalizar sus métodos a las ecuaciones de división de la lemniscata ([*124* a], t. I, p. 413), y había desarrollado, en notas que no han sido publicadas hasta nuestros días, el caso particular de la división por 5 ([*124* a], t. X, pp. 161-162 y 517). Al igual que tantas otras breves y enigmáticas indicaciones que Gauss gustaba de diseminar en sus es-

ción de las ecuaciones llamadas «abelianas», cuya resolubilidad por radicales demuestra en una memoria célebre ([*1*], t. I, p. 478); con ocasión de este trabajo define con precisión la noción de polinomio irreducible sobre un cuerpo dado (el cuerpo engendrado por los coeficientes de la ecuación que estudia)[27]. Finalmente, la muerte se lo lleva en 1829, cuando estudiaba el problema general de la caracterización de todas las ecuaciones resolubles por radicales, y acaba de comunicar a Crelle y Legendre resultados muy próximos a los de Galois ([*1*], t. II, pp. 219-243, 269-270 y 279).

A este último le estaba reservada, tres años más tarde, la coronación del edificio [*123*]. Como Abel, pero de forma todavía más clara, empieza por definir (con otra terminología) la pertenencia de una cantidad a un cuerpo engendrado por cantidades dadas, la noción de adjunción, y los polinomios irreducibles sobre un cuerpo dado. Dada una ecuación $F(x) = 0$ sin raíces múltiples, y con coeficientes en un cuerpo dado K, demuestra sucesivamente que «*siempre puede formarse una función V de las raíces tal que ninguno de los valores que se obtienen permutando en esta función las raíces de todas las maneras posibles, sea igual a otro*», que esta función «*tendrá la propiedad de que todas las raíces de la ecuación propuesta se expresarán racionalmente en función de V*», y que, si V, V', V'' ... son las raíces de la ecuación irreducible que satisface V, «*si* $a = f(V)$ *es una raíz de la propuesta,* $f(V')$ *será igualmente una raíz de la propuesta*» ([*123*], pp. 36-37); en lenguaje moderno, demuestra que V, al igual que cualquiera de sus conjugados sobre K, engendra el cuerpo N de las raíces de F. Define entonces el grupo Γ de F como el conjunto de las permutaciones de las raíces x_i que se obtienen sustituyendo en vez de V, en la expresión racional de cada una de las x_i en función de V, una cualquiera de las conjugadas de V, y obtiene inmediatamente la caracterización de los elementos de K por la propiedad de ser invariantes por toda permutación de Γ ([*123*], pp. 51).

critos la frase de las *Disquisitiones* llamó fuertemente la atención de sus contemporáneos, y contribuyó no poco a incitar a Abel y Jacobi en sus trabajos sobre el problema.

[27] La misma noción de cuerpo (como, más generalmente, la de conjunto) era más o menos ajena al pensamiento matemático antes de Cantor y Dedekind. Abel y Galois definían los *elementos* de su «cuerpo de base» como todos aquellos que pueden expresarse racionalmente en función de las cantidades dadas, sin pensar en considerar explícitamente el conjunto que forman estos elementos.

A continuación demuestra que si N contiene el cuerpo de raíces L de otro polinomio, el grupo formado por N sobre L es un subgrupo invariante de Γ, introduciendo la noción de subgrupo invariante con este fin ([*123*], p. 175). A partir de aquí deduce finalmente el criterio de resolución de una ecuación mediante radicales, siguiendo un razonamiento del que indicamos lo esencial: supuesto que el cuerpo de base K contiene todas las raíces de la unidad, debe existir por hipótesis una sucesión creciente $(K_i)_{0 \leq i \leq m}$ de cuerpos intermedios entre K y N, con $K_0 = K$, y $K_m = N$, obteniéndose el cuerpo K_{i+1} mediante la adjunción a K_i de todas las raíces de una ecuación binomia $x^{n_i} - a_i = 0$ (con $a_i \in K_i$). Existe entonces en Γ una sucesión decreciente (Γ_i) de subgrupos tales que $\Gamma_0 = \Gamma$, y $\Gamma_m = \{\varepsilon\}$ (elemento neutro), siendo Γ_{i+1} invariante en Γ_i, y siendo cíclico el grupo cociente Γ_i/Γ_{i+1} (caso en el que se dice que el grupo Γ es *resoluble*). Recíprocamente, si es así, el uso de una resolvente de Lagrange demuestra que K_{i+1} se obtiene mediante la adjunción a K_i de todas las raíces de una ecuación binomia, y por tanto la ecuación $F(x) = 0$ es soluble por radicales[28]. La imposibilidad de la resolución por radicales de la ecuación «general» de grado $n > 4$ es entonces una consecuencia del hecho de que el grupo Γ de esta ecuación, isomorfo al grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$, no es resoluble.

A partir de la mitad del siglo XIX, los algebristas, como ya hemos señalado (cf. p. 82), amplían considerablemente el campo de sus investigaciones, casi enteramente limitadas hasta entonces al estudio de las ecuaciones. A la luz de los descubrimientos de Galois, se pone de manifiesto que el problema de la «resolución por radicales» no es más que un caso particular, bastante artificial, del problema general de la clasificación de los irracionales. Este último

[28] Si K no contiene todas las raíces de la unidad, y si E es el cuerpo obtenido añadiendo a K todas estas raíces, $E \cap N$ es una extensión abeliana de K, de donde se deduce fácilmente (utilizando la estructura de los grupos abelianos finitos) que, para que el grupo de N sobre K sea resoluble, es necesario y suficiente que el grupo de E(N) sobre E lo sea. Teniendo en cuenta el hecho de que las raíces de la unidad son expresables «por radicales», vemos que el criterio de Galois es independiente de toda hipótesis sobre el cuerpo de números K (y es válido más generalmente para todo cuerpo de característica 0). En realidad, Galois no hace ninguna hipótesis simplificadora sobre el cuerpo K, y razona por inducción sobre el orden de los radicales añadidos sucesivamente a K ([*123*], p. 60-61).

va a ser abordado de distintas maneras durante los últimos años del siglo XIX, acumulándose poco a poco numerosos resultados dispersos, preparando el camino a la síntesis de Steinitz.

En lo que se refiere primeramente a los irracionales algebraicos, la teoría de Galois proporciona un principio fundamental de clasificación, reduciendo el estudio de una ecuación algebraica al de su grupo. Por tanto, es fundamentalmente la teoría de los grupos de permutaciones, de la que no vamos a hablar aquí (véase p. 83) la que es el objeto principal de los trabajos en Algebra pura durante este periodo. Los demás progresos de la teoría de los cuerpos algebraicos provienen del desarrollo, en la misma época, de la Teoría de Números y de la Geometría Algebraica. Además, estos progresos se refieren fundamentalmente a la forma de exponer la teoría, y se deben en su mayor parte a Dedekind [*79*], que introduce las nociones de cuerpo y de anillo[29], y (en relación con sus trabajos sobre los sistemas hipercomplejos) desarrolla de modo sistemático el aspecto lineal de la teoría de las extensiones ([*79*], t. III, pp. 33 y ss.). Es también Dedekind quien considera el grupo de Galois como formado por automorfismos de la extensión considerada, y no como grupo de permutaciones de las raíces de una ecuación, y demuestra (para los cuerpos de números) el teorema fundamental de independencia lineal de los automorfismos ([*79*], t. III, p. 29) así como la existencia de bases normales de una extensión de Galois ([*79*], t. II, p. 433). Aborda finalmente el problema de las extensiones algebraicas de grado infinito, y hace notar que la teoría de Galois no puede aplicársele sin modificaciones (un subgrupo cualquiera del grupo de Galois no siempre coincide con el grupo de la extensión respecto a una subextensión), y, en una atrevida intuición, piensa ya en considerar el grupo de Galois como un grupo topológico[30], idea que solo alcanzará su madurez con la teoría de las extensiones de Galois de grado infinito, desarrollada por Krull en 1928 [*187* d].

Paralelamente a esta evolución se va precisando la noción de elemento trascendente sobre un cuerpo. La existencia de números trascendentes es demostrada por primera vez por Liouville en 1844,

[29] La palabra «cuerpo» se debe al mismo Dedekind, la de «anillo» fue introducida por Hilbert (Dedekind llamaba «órdenes» a los anillos).

[30] «...*El conjunto de estas permutaciones forma en un cierto sentido una multiplicidad continua, cuestión que no profundizaremos aquí*» ([79], t. II, p. 288).

mediante un procedimiento de construcción explícita, basado en la teoría de las aproximaciones diofánticas [*204* c]; Cantor da en 1874 otra demostración «no constructiva» empleando simplemente consideraciones sobre la potencia de los conjuntos [*47*]; y finalmente, Hermite demuestra en 1873 la trascendencia de e, y Lindemann en 1882 la de π por un método análogo al de Hermite, poniendo punto final de este modo al viejo problema de la cuadratura del círculo[31].

En lo referente al lugar de los números trascendentes en los cálculos algebraicos, Kronecker observa en 1882 que si x es trascendente sobre un cuerpo K, el cuerpo K(x) es isomorfo al cuerpo de fracciones racionales K(X) ([*186* a], t. II, p. 253). Además, hace de la adjunción de indeterminadas a un cuerpo la piedra angular de su exposición de la teoría de los números algebraicos ([*186* a], t. II, pp. 245-387). Por otro lado, Dedekind y Weber muestran ese mismo año [*80*] la forma en que los métodos aritméticos pueden servir para fundamentar la teoría de las curvas algebraicas. Vemos de este modo aparecer en varias direcciones analogías entre la Aritmética y Geometría algebraica, que resultarían extraordinariamente fecundas para ambas.

Los cuerpos que aparecen en todos estos trabajos están formados por elementos «concretos» en el sentido de las matemáticas clásicas —números (complejos) o funciones de variables complejas[32]—. Pero ya Kronecker advierte en 1882 el hecho, oscuramente presentido por Gauss y Galois, de que las «indeterminadas» solamente desempeñan en su teoría el papel de elementos de base de un álgebra, y no el de variables en el sentido del Análisis ([*186* a], t. II, pp. 339-

[31] Se encontrarán demostraciones sencillas de estos teoremas por ejemplo en [*163* a], t. I, p. 1.

[32] Al igual que sus predecesores, Kronecker, Dedekind, y Weber, no definen en realidad la noción de «función algebraica» de una o varias variables complejas. En efecto, solamente puede definirse correctamente una «función algebraica» de una variable compleja (en el sentido del Análisis) una vez definida la superficie de Riemann correspondiente, y precisamente la definición de la superficie de Riemann (por medios puramente algebraicos) era el fin perseguido por Dedekind y Weber. Este aparente círculo vicioso desaparece desde luego cuando se define un cuerpo de «funciones algebraicas» como una extensión algebraica abstracta de un cuerpo de fracciones racionales: de hecho, Dedekind y Weber emplean únicamente esta definición, lo que hace plenamente legítimos sus resultados.

340); y en 1887 desarrolla esta idea dentro de un vasto programa que pretendía nada menos que rehacer toda la matemática rechazando todo aquello que no fuese reducible a operaciones algebraicas con números enteros. A propósito de esto, y recogiendo una idea de Cauchy ([*56* a] (1), t. X, pp. 312 y 351) que había definido el cuerpo **C** de los números complejos como el cuerpo de restos $\mathbf{R}[X]/(X^2 + 1)$, demuestra Kronecker cómo la teoría de los números algebraicos es totalmente independiente del «teorema fundamental del álgebra», e incluso de la teoría de los números reales, siendo todo cuerpo de números algebraicos (de grado finito) isomorfo a un cuerpo de restos $\mathbf{Q}[X]/(f)$ (f polinomio irreducible sobre **Q**) ([*186* a], t. III_1, pp. 211-240). Como hace notar algunos años después H. Weber [*327* a], desarrollando un primer intento de teoría axiomática de cuerpos, este método de Kronecker se aplica en realidad a todo cuerpo de base K. En particular, Weber indica que se puede tomar como cuerpo K un cuerpo $Z/(p)$ (p primo), incluyendo de este modo en la teoría de cuerpos el cálculo de congruencias «módulo p»; esta última había surgido en la segunda mitad del siglo XVIII con Euler, Lagrange, Legendre y Gauss, y no se había dejado de observar la analogía que presentaba con la teoría de las ecuaciones algebraicas; desarrollando esta analogía, Galois (pensando en sus trabajos sobre la teoría de grupos) no había dudado en introducir las «raíces ideales» de una congruencia irreducible módulo p[33], y había indicado sus propiedades principales ([*123*], pp. 113-127)[34]. Cuando se aplica el método de Kronecker a $\mathbf{Z}/(p)$ se encuentra además (con una terminología diferente) la presentación que ya habían dado Serret y Dedekind ([*79*], t. I, p. 40) de la teoría de estos «imaginarios de Galois».

A todos estos ejemplos de «cuerpos abstractos» hay todavía

[33] En un manuscrito que data probablemente de 1799, pero publicado solamente después de su muerte, Gauss, sin introducir todavía «raíces ideales», obtiene, en una forma equivalente, una buena parte de los resultados de Galois ([*124* a], t. II, pp. 212-240, en particular p. 217).

[34] Galois es plenamente consciente del carácter formal de los cálculos algebraicos, y no duda, por ejemplo, en tomar la derivada del primer miembro de una congruencia para mostrar que esta última no tiene raíces «imaginarias» múltiples ([*123*], p. 117). En particular subraya que el teorema del elemento primitivo es igualmente válido para un cuerpo finito y para un cuerpo de números ([*123*], p. 117, sin dar la demostración.

que añadir, al cambiar de siglo, cuerpos de un nuevo tipo totalmente diferente, los cuerpos de series formales introducidos por Veronese [*318*], y sobre todo los cuerpos p-ádicos de Hensel [*157* f]. El descubrimiento de estos últimos condujo a Steinitz (como él mismo reconoce explícitamente) a separar las nociones abstractas comunes a todas estas teorías en un trabajo fundamental [*294* a], con el que se puede considerar que nace la concepción actual del Algebra. Desarrolla sistemáticamente las consecuencias de los axiomas de los cuerpos conmutativos, introduce las nociones de cuerpo primo, de elementos (algebraicos) separables, y de cuerpo perfecto, define el grado de trascendencia de una extensión, y demuestra finalmente la existencia de extensiones algebraicamente cerradas de un cuerpo cualquiera.

La teoría de Steinitz ha sido completada muy recientemente en algunos puntos importantes. Por una parte, los trabajos de Artin han puesto de manifiesto el carácter lineal de la teoría de Galois [*7* a]. Por otra, la noción general de derivación (calcada de las propiedades formales del cálculo diferencial clásico), presentida por Dedekind ([*79*], t. II, p. 412), e introducida por Steinitz en el caso particular de un cuerpo de fracciones racionales ([*294* a], pp. 209-212), ha sido empleada con éxito en el estudio (esencial en la moderna Geometría algebraica) de las extensiones trascendentes, y sobre todo en la generalización a estas últimas de la noción de separabilidad [*330* d].

DIVISIBILIDAD. CUERPOS ORDENADOS

Las operaciones aritméticas elementales, y sobre todo el cálculo con fracciones, no podían dejar de dar lugar a numerosas constataciones empíricas sobre la divisibilidad de los números enteros. Pero ni los babilonios (tan expertos, sin embargo, en el Algebra), ni los egipcios (pese a su acrobático cálculo de fracciones) parecen haber conocido reglas generales rigiendo estas propiedades, y es a los griegos a los que corresponde la iniciativa en este campo. Su obra aritmética, de la que encontramos una exposición magistral en los Libros VII y IX de Euclides [*107*] no es inferior en nada a sus más bellos descubrimientos en las otras ramas de las matemáticas. La existencia del m.c.d. de dos números enteros es demostrada ya al principio del Libro VII por el procedimiento conocido por el nombre de «algoritmo de Euclides»[1], y sirve de base a todo el desarrollo posterior (propiedades de los números primos, existencia y cálculo

[1] Si a_1 y a_2 son dos enteros tales que $a_1 \geq a_2$, se define por recurrencia a_n (para $n \geq 3$) como el resto de la división euclídea de a_{n-2} por a_{n-1}, si m es el índice más pequeño tal que $a_m = 0$, a_{m-1} es el m.c.d. de a_1 y a_2. Se trata de la trasposición al dominio de los enteros del método de las sustracciones sucesivas (llamado también a veces ἀνθυφαίρεσις) para buscar la medida común de dos magnitudes. Este se remonta sin duda a los pitagóricos, y parece haber sido la base de una teoría pre-eudoxiana de los números irracionales.

del m.c.m., etc.); la coronación del edificio está formada por los dos importantes teoremas que demuestran la existencia de infinitos números primos (Libro IX, Prop. 20) y que ofrecen un procedimiento de construcción de números pares perfectos a partir de ciertos números primos (procedimiento que de hecho proporciona todos los números pares perfectos, como demostraría Euler). Solamente la existencia y la unicidad de la descomposición en factores primos no se demuestran en el caso general, sin embargo Euclides demuestra explícitamente que todo entero es divisible por un número primo (Libro VII, Prop. 31), así como las dos proposiciones siguientes (Libro IX, Props. 13 y 14):

«*Si, a partir de la unidad, hay tantos números como se quiera en progresión de razón constante* [i.e. geométrica], *y el siguiente a la unidad es primo, el mayor no será divisible por ningún número, excepto por aquellos que figuran en la progresión*» (dicho de otro modo, una potencia p^n de un número primo solamente es divisible por las potencias de p de exponente $\leq n$).

«*Si un número es el más pequeño divisible por números primos* [dados], *no será divisible por ningún otro número primo con la excepción de los que inicialmente le dividían*» (de otro modo, un producto de números primos distintos $p_1 \dots p_k$ no tiene factores primos distintos de $p_1, \dots, p_k$).

Parece pues que si Euclides no enuncia el teorema general, ello se debe solamente a la carencia de una terminología y de una notación adecuadas para las potencias cualesquiera de un entero[2].

Aunque un estudio atento haga verosímil la existencia en el texto de Euclides de varias «capas» sucesivas, cada una de las cuales correspondería a una etapa del desarrollo de la Aritmética[3], parece

[2] En apoyo de esta tesis se puede también señalar que la demostración del teorema sobre los números perfectos no es en el fondo más que otro caso particular del teorema de descomposición única en factores primos. Además, todos los testimonios están de acuerdo para probar que ya en esta época la descomposición de un número en factores primos era conocida y utilizada corrientemente, pero no se encuentra una demostración completa del teorema de descomposición antes de la dada por Gauss al principio de las *Disquisitiones* ([*124* a], t. I. p. 15).

[3] Cf. [*317*d]. Un ejemplo de residuo de una versión anterior lo dan las proposiciones 21 a 34 del Libro IX, que se refieren a las propiedades más elementales de la división por 2, y se remontan, sin duda, a una época en la que la teoría general de los números primos no se había desarrollado todavía. Sabemos además que las categorías de Par

que toda esta evolución ha tenido lugar desde principios del siglo V hasta mediados del IV, y no pueden dejarse de admirar la sutileza y la seguridad lógicas que se ponen de manifiesto: será necesario esperar dos milenios para asistir a progresos parecidos en la Aritmética.

Los problemas «indeterminados» o «diofánticos» han constituido el origen de los avances posteriores de la Teoría de números. La denominación «ecuaciones diofánticas», tal y como se utiliza hoy, no está del todo justificada históricamente, dicha denominación se aplica generalmente a las ecuaciones (o sistemas de ecuaciones) algebraicas de coeficientes enteros, de las que solo se consideran las soluciones enteras. Dicho problema es en general imposible si las ecuaciones son «determinadas», es decir, si no tienen más que un número finito de soluciones (reales o complejas), pero admite muchas veces solución cuando hay más incógnitas que ecuaciones. Pero, si bien Diofanto parece haber sido el primero en considerar problemas «indeterminados», solamente en casos excepcionales busca las soluciones enteras, y en general se contenta con obtener *una sola* solución en números *racionales* [*91* a]. Se trata de un tipo de problemas que pueden resolverse muy a menudo mediante cálculos algebraicos en los que no interviene la naturaleza aritmética de las incógnitas[4], la teoría de la divisibilidad tiene también un papel muy secundario (la denominación de número primo aparece solamente una vez [*91* a], Libro V, prob. 9, t. I, pp. 334-335), y la noción de números primos entre sí se menciona únicamente

e Impar desempeñaban un papel importante en las especulaciones filosófico-místicas de los primeros pitagóricos, a los que se siente naturalmente la tentación de hacer remontar este fragmento (cf. [*17* b]).

[4] Si bien Diofanto, en los problemas indeterminados, se reduce siempre a problemas con una sola incógnita, mediante una fijación numérica de las otras incógnitas que hace posible su ecuación final, parece que este método se deba fundamentalmente a su notación, que no le permitía calcular con varias incógnitas a la vez; en todo caso, no pierde de vista a lo largo del cálculo las sustituciones numéricas que ha hecho, y las modifica, si es necesario, cuando no le convienen, escribiendo una condición de compatibilidad para las variables sustituidas, y resolviendo previamente este problema auxiliar. En otras palabras, maneja estos valores numéricos sustituidos como manejaríamos nosotros parámetros, ya que en definitiva lo que él hace se reduce a encontrar una representación paramétrica racional de una variedad algebraica dada o de una subvariedad de ésta (cf. [*153* f]).

a propósito del teorema que afirma que el cociente de dos números primos entre sí solamente puede ser un cuadrado perfecto si cada uno de ellos lo es)[5].

El estudio de las soluciones enteras de los problemas indeterminados no empieza realmente hasta los matemáticos chinos e indios de la alta Edad Media. Los primeros parecen haber sido llevados a especulaciones de este género por los problemas prácticos de la confección de los calendarios (donde la determinación de los periodos comunes a varios ciclos de fenómenos astronómicos constituye precisamente un problema «diofántico» de primer grado); a ellos se debe en todo caso (sin duda entre el siglo IV y el VII de nuestra era) una regla de resolución de congruencias lineales simultáneas. En cuanto a los indios, cuya matemática conoce su pleno desarrollo entre el siglo V y el XIII, no solamente saben tratar metódicamente (mediante la aplicación del algoritmo de Euclides) los sistemas de ecuaciones diofánticas lineales con un número cualquiera de incógnitas[6], sino que también son los primeros en plantearse y resolver problemas de segundo grado, entre ellos algunos casos particulares de la «ecuación de Fermat» $Nx^2 + 1 = y^2$ ([*78*], vol. II, pp. 87-307).

No vamos a continuar haciendo aquí la historia de la teoría de las ecuaciones diofánticas de grado > 1, que, pasando por los trabajos de Fermat, Euler, Lagrange y Gauss, llegaría a dar lugar en el siglo XIX a la teoría de los enteros algebraicos (cf. pp 131-142). Como ya hemos indicado (cf. p. 86), el estudio de los sistemas lineales, que no parece presentar problemas dignos de interés, queda un poco al margen durante este periodo: en particular no se intenta formular las condiciones generales de posibilidad para un sistema cualquiera, ni tampoco describir el conjunto de las soluciones. Sin embargo, a mediados del siglo XIX, Hermite se ve llevado a utilizar, en sus trabajos sobre la teoría de números, diversos lemas relativos a las ecuaciones diofánticas lineales, y sobre todo una «forma reducida» de una sustitución lineal con coeficientes enteros ([*159*], t. I, pp. 164

[5] Hay, sin embargo, algunos indicios de conocimientos aritméticos más avanzados en Diofanto: sabe, por ejemplo, que la ecuación $x^2 + y^2 = n$ no tiene soluciones racionales si n es un entero de la forma $4k + 3$ (Libro V, problema 9, y Libro VI, problema 14 ([*91* a], t. I, pp. 332-335 y p. 425; cf. también [*153* f], pp. 105-110)).

[6] Los problemas astronómicos han figurado también entre los que llevaron a los indios a ocuparse de este tipo de ecuaciones (cf. [*78*], t. II, pp. 100, 117 y 135).

y 265). Finalmente, después de que Heger diese en 1858 la condición de posibilidad para un sistema cuyo rango sea igual al número de ecuaciones, H. J. Smith, en 1861, define los factores invariantes de una matriz con coeficientes enteros, y obtiene el teorema general de reducción de una matriz de este tipo a su «forma canónica» ([*287*], t. I, pp. 367-409).

Mientras tanto se iba precisando poco a poco la noción de grupo abeliano, después de su introducción por Gauss (cf. p. 89), y debido a la importancia adquirida por dicha noción en el desarrollo posterior de la teoría de números. En el estudio particularmente profundo realizado en las *Disquisitiones* del grupo abeliano finito de las clases de formas cuadráticas de discriminante dado, Gauss había observado muy pronto que algunos de estos grupos no eran cíclicos: «*en este caso* —dice— *una base* [es decir, un generador] *no basta, es necesario tomar dos, tres, o más, que, mediante la multiplicación y la composición*[7], *puedan dar todas las clases*» ([*124* a], t. I, pp. 374-375). No puede asegurarse que Gauss haya querido con estas palabras describir la descomposición del grupo en producto directo de grupos cíclicos; sin embargo, en el mismo artículo de las *Disquisitiones*, demuestra que existe un elemento del grupo cuyo orden es el m.c.m. de los órdenes de todos los elementos —en otros términos, demuestra la existencia del mayor factor invariante del grupo ([*124* a], t. I, p. 373)—; y por otra parte, conocía la noción de producto directo, ya que en un manuscrito del año 1801, pero no publicado antes de su muerte, esboza una demostración general de la descomposición de un grupo abeliano finito en producto directo de *p*-grupos[8] ([*124* a], t. II, p. 266). En todo caso, en 1868, Schering, editor de las obras de Gauss, demuestra, inspirado por estos resultados (y sobre todo por este manuscrito que acaba de encontrar), siempre para el grupo de clases de formas cuadráticas, el teorema general de descomposición ([*272*], t. I, pp. 135-148) utilizando un método que, recogido dos años después en términos abstractos por Kronecker ([*186* a], t. I, pp. 273-282) es esencialmente el mismo que se emplea hoy.

7 Gauss emplea la notación aditiva para la ley de composición de clases, y, por tanto, entiende por «multiplicación» el producto de una clase por un entero.

8 También Abel demuestra de paso esta propiedad en su memoria sobre las ecuaciones abelianas ([*1*], t. I, pp. 494-497).

En lo que se refiere a los grupos abelianos sin torsión, ya hemos indicado (cf. pp. 95-96) de qué forma la teoría de las funciones elípticas y las integrales abelianas, desarrollada por Gauss, Abel y Jacobi, iba llevando poco a poco a tomar conciencia de su estructura; el primero y más célebre ejemplo de descomposición de un grupo infinito en suma directa de grupos monógenos es dado por Dirichlet en 1846 en su memoria sobre las unidades de un cuerpo de números algebraicos ([*92*], t. I, pp. 619-644). Sin embargo, hay que esperar hasta 1879 para que se ponga de manifiesto la relación entre la teoría de los grupos abelianos de tipo finito y el teorema de Smith, y sea utilizada explícitamente por Frobenius y Stickelberger ([*120*], § 10).

En esta misma época se completa también la teoría de la semejanza de matrices (con coeficientes reales o complejos). La noción de valor propio de una sustitución lineal aparece explícitamente en la teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, aplicada por Lagrange ([*191*], t. I, p. 520) a la teoría de los pequeños movimientos, y por Lagrange ([*191*], t. VI, pp. 655-666) y Laplace ([*193*], t. VIII, pp. 325-366) a las desigualdades «seculares» de los planetas. Está igualmente implícita en muchos problemas abordados también a mediados del siglo XVIII, como el de hallar los ejes de una cónica o una cuádrica (realizado en primer lugar por Euler ([*108* a] (1), t. IX, p. 384)), o el estudio (igualmente debido a Euler ([*108* a] (2), t. III, pp. 200-201)) de los ejes principales de inercia de un cuerpo sólido (descubiertos por de Segner en 1755). Hoy sabemos también que esta misma noción (aunque en una forma mucho menos manifiesta) aparecía también en los comienzos de la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales, en particular en la ecuación de la cuerda vibrante. Pero (sin hablar de este último caso) el parentesco entre estos distintos problemas no es reconocido antes de Cauchy ([*56* a] (2), t. V, p. 248 y t. IX, p. 174). Además, como en la mayoría de ellos aparecen matrices simétricas, son los valores propios de estas matrices los que se estudian al principio; señalemos aquí que ya en 1826 demuestra Cauchy la invarianza por semejanza de los valores propios de estas matrices, y demuestra que son reales para una matriz simétrica de orden 3 ([*56* a] (2), t. V, p. 248), resultado que generaliza a las matrices simétricas reales unos tres años después ([*56* a] (2), t. IX, p. 174)[9]. La noción general

de proyectividad, introducida por Möbius en 1827 ([223], t. I, p. 217) lleva rápidamente al problema de la clasificación de estas transformaciones (para 2 y 3 dimensiones en primer lugar), que no es otra cosa que el problema de la semejanza de las matrices correspondientes; pero durante mucho tiempo esta cuestión es tratada solamente mediante los métodos «sintéticos» tan en boga a mediados del siglo XIX, y sus progresos (muy lentos por otra parte) no parecen haber tenido influencia sobre la teoría de los valores propios. No sucede lo mismo con otro problema de geometría, el de la clasificación de los haces de cónicas o de cuádricas, que, desde el punto de vista moderno, se reduce al estudio de los divisores elementales de la matriz $U + \lambda V$, siendo U y V matrices simétricas; Sylvester aborda el problema desde este punto de vista en 1851, examinando cuidadosamente (con vistas a encontrar «formas canónicas» del haz considerado) el comportamiento de los menores de la matriz $U + \lambda V$ cuando se sustituye λ por un valor que anula su determinante ([304], t. I, pp. 219-240). El aspecto puramente algebraico de la teoría de valores propios progresa simultáneamente, hacia 1850 varios autores (entre ellos Sylvester) demuestran que los valores propios de U^n son las potencias n-ésimas de los valores propios de U, mientras que Cayley, en 1858, en la misma memoria en que funda el cálculo de matrices ([58], t. II, pp. 475-496), enuncia el «teorema de Hamilton-Cayley» para una matriz cuadrada de orden cualquiera[10], contentándose con demostrarlo mediante un cálculo directo para las de orden 2 y 3. Por último, Weierstrass, en 1868, siguiendo el método de Sylvester, obtiene las «formas canónicas» para un «haz» $U + \lambda V$, donde esta vez U y V son matrices cuadradas no necesariamente simétricas, cumpliendo la única condición de que $\det(U + \lambda V)$ sea distinto de cero; a partir de aquí deduce la definición de divisores elementales de una matriz cuadrada cualquiera

[9] Un intento de demostración de este resultado para el caso particular de las desigualdades «seculares» los planetas, había sido hecho ya, en 1784, por Laplace ([193], t. XI, pp. 49-92). En lo que se refiere a la ecuación de tercer grado que da los ejes de una cuádrica real, Euler había admitido sin demostración el hecho de que las raíces fuesen reales, y un intento de demostración de Lagrange en 1773 ([191], t. III, pp. 579-616) no era suficiente; este punto fue demostrado rigurosamente por primera vez por Hachette y Poisson en 1801 [140].

[10] Hamilton había demostrado incidentalmente este teorema para las matrices de orden 3 algunos años antes ([145 a], pp. 566-567).

(con coeficientes complejos), y demuestra que caracterizan la matriz salvo una semejanza ([329 a], t. II, pp. 19-44). Por otra parte, estos resultados vuelven a ser hallados parcialmente (y en apariencia de modo independiente) por Jordan dos años después[11] ([174 a], pp. 114-125). Una vez más, es Frobenius el que, en 1879, muestra que el teorema de Weierstrass puede deducirse simplemente del teorema de Smith extendido a los polinomios ([119], t. I, pp. 482-544, § 13).

Acabamos de aludir a la teoría de la divisibilidad de los polinomios de una variable; la cuestión de la división de los polinomios debía plantearse de modo natural desde los comienzos del álgebra, como operación inversa de la multiplicación (esta última ya era conocida por Diofanto, al menos para los polinomios de grado pequeño), pero es razonable pensar que no era posible abordar el problema de modo general hasta que se dispusiera de una notación coherente para las distintas potencias de la variable. De hecho, no se encuentran ejemplos del proceso de división «euclídea» de los polinomios, tal como nosotros lo conocemos, antes de mediados del siglo XVI[12] y S. Stévin (que utiliza esencialmente la notación de los exponentes) parece haber sido el primero en tener la idea de la extensión del «algoritmo de Euclides» para hallar el m.c.d. de dos polinomios ([295], t. I, pp. 54-56). Con la excepción anterior, la noción de divisibilidad permaneció como algo propio de los enteros racionales hasta mediados del siglo XVIII. Es Euler el que, en 1770, abre un nuevo capítulo de la Aritmética al extender, no sin cierta temeridad, la noción de divisibilidad a los enteros de una extensión cuadrática: intentando determinar los divisores de un número de la forma $x^2 + cy^2$ (x, y, c enteros racionales), escribe $x + y\sqrt{-c} = (p + q\sqrt{-c})(r + s\sqrt{-c})$ (p, q, r, s, enteros racionales) y tomando las normas de los dos miembros no duda en afirmar que de este modo se obtienen todos los divisores de $x^2 + cy^2$ de la forma $p^2 + cq^2$ ([108 a] (1), t. I, p. 422). En otros términos, Euler

[11] Jordan no menciona la invariancia de la forma canónica que obtiene. Es interesante además observar que no trata la cuestión para matrices con términos complejos, sino para matrices sobre un cuerpo finito. Señalemos, por otra parte, que ya, en 1862, había dado Grassmann un método de reducción de una matriz (con términos complejos) a la forma triangular, y había mencionado explícitamente la relación entre esta reducción y la clasificación de las proyectividades ([134], t. I_2, pp. 249-254).

[12] Cf. por ejemplo [33].

razona como si el anillo $\mathbf{Z}[\sqrt{-c}]$ fuese principal; un poco más lejos emplea un razonamiento análogo para aplicar el método del «descenso infinito» a la ecuación $x^3 + y^3 = z^3$ (para lo que escribe que $p^2 + 3q^2$ es un cubo, lo que hace poniendo $p + q\sqrt{-3} = (r + s\sqrt{-3})^3$). Pero ya en 1773 demuestra Lagrange ([*191*], t. III, pp. 695-795) que los divisores de los números de la forma $x^2 + cy^2$ no son siempre de esa forma, primer ejemplo de la dificultad fundamental que se iba a presentar mucho más claramente en los estudios, realizados por Gauss y sus sucesores, de la divisibilidad en los cuerpos de raíces de la unidad[13]; en general no es posible extender directamente a estos cuerpos las propiedades esenciales de la divisibilidad de los enteros racionales, la existencia del m.c.d. y la unicidad de la descomposición en factores primos. No es este el lugar apropiado para narrar detalladamente cómo primero Kummer, para los cuerpos de las raíces de la unidad [*188* b][14], y después Dedekind y Kronecker para los cuerpos de números algebraicos en general, consiguieron superar este formidable obstáculo mediante la creación de la teoría de ideales, uno de los progresos más fundamentales del álgebra moderna (cf. pp. 131-142). Pero Dedekind, siempre preocupado por los fundamentos de las distintas teorías matemáticas, no se contenta con este éxito, y, analizando el mecanismo de las relaciones de divisibilidad, pone los cimientos de la teoría moderna de los grupos reticulados en una memoria (sin ninguna resonancia entre sus contemporáneos, y que permaneció olvidada

[13] Gauss parece haber esperado por un momento que el anillo de los enteros en el cuerpo de las raíces n-ésimas de la unidad fuese un anillo principal; en un manuscrito no publicado durante su vida ([*124* a], t. II, pp. 387-397) le vemos demostrar la existencia de un proceso de división euclídea en el cuerpo de las raíces cúbicas de la unidad, y dar algunas indicaciones acerca de un proceso análogo en el cuerpo de las raíces 5-ésimas; Gauss utiliza estos resultados para demostrar mediante un razonamiento de «descenso infinito» más correcto que el de Euler la imposibilidad de la ecuación $x^3 + y^3 = z^3$ en el cuerpo de las raíces cúbicas de la unidad, señala que se puede extender el método a la ecuación $x^5 + y^5 = z^5$, pero se detiene en la ecuación $x^7 + y^7 = z^7$ al constatar que en este caso es imposible rechazar *a priori* el caso en que x, y, z, no son divisibles por 7.

[14] A partir de su primer trabajo sobre los «números ideales», Kummer menciona explícitamente la posibilidad de aplicar su método no solamente a los cuerpos de raíces de la unidad, sino también a los cuerpos cuadráticos, y volver a encontrar de este modo los resultados de Gauss sobre las formas cuadráticas binarias ([*188* b], pp. 324-325).

durante más de treinta años) que es sin duda uno de los primeros trabajos (en fecha) de álgebra axiomática ([*79*], t. II, páginas 103-147).

Desde mediados del siglo XVIII, la búsqueda de una demostración del «teorema fundamental del álgebra» está a la orden del día (cf. p. 108). No vamos a recordar aquí los intentos de d'Alembert, que inauguraban la serie de demostraciones basadas en el cálculo infinitesimal (cf. p. 220). Pero en 1749 Euler aborda el problema de un modo totalmente diferente ([*108* a] (1), t. VI, pp. 78-147): para todo polinomio f con coeficientes reales intenta demostrar la existencia de una descomposición $f = f_1 f_2$ en dos polinomios (no constantes) con coeficientes reales, lo que le proporcionaría la demostración del «teorema fundamental» por inducción sobre el grado de f. Es suficiente incluso, como él mismo hace notar, detenerse en el primer factor de grado impar, y por tanto toda la dificultad se reduce a hacer la demostración en el caso en que el grado n de f es par. Euler se limita entonces al estudio del caso en que los dos factores buscados son de grado $n/2$, e indica que, mediante un cálculo de eliminación convenientemente realizado, los coeficientes desconocidos de f_1 y f_2 pueden ser expresados racionalmente en función de una raíz de una ecuación con coeficientes reales cuyos términos extremos son *de signos contrarios*, y que por tanto tiene al menos una raíz real. Pero la demostración de Euler no es más que un esbozo, y muchos puntos fundamentales son pasados por alto; solamente en 1772 consigue Lagrange resolver las dificultades planteadas por esta demostración ([*191*], t. III, pp. 479-516) mediante un análisis extraordinariamente largo y minucioso, en el que demuestra un considerable virtuosismo en el manejo de los métodos «galoisianos», recreados por él (cf. pp. 109-110).

Sin embargo, Lagrange, al igual que Euler y que todos sus contemporáneos, no duda en razonar formalmente en un «cuerpo de raíces» de un polinomio (es decir, en su lenguaje, en considerar las «raíces imaginarias» de este polinomio); la matemática de su época no había proporcionado ninguna justificación de esta forma de razonamiento. También Gauss, deliberadamente hostil, desde sus comienzos, al formalismo desenfrenado del siglo XVIII, protesta con fuerza, en su disertación, contra este abuso ([*124* a], t. III, p. 3).

Pero habría dejado de ser Gauss si no hubiera sentido que se trataba solamente de una presentación exteriormente defectuosa de un razonamiento intrínsecamente correcto. También le vemos, algunos años después ([*124* a], t. III, p. 33, cf. también [*124* b]) volver a tomar una variante simplificada del razonamiento de Euler, ya sugerida en 1759 por de Foncenex (pero que este último no había sabido llevar a buen término), y deducir a partir de ella una nueva demostración del «teorema fundamental», en la que evita cuidadosamente todo empleo de raíces «imaginarias», remplazando este último por hábiles adjunciones y especializaciones de indeterminadas.

El papel de la Topología en el «teorema fundamental» se reducía de este modo al único teorema según el cual un polinomio con coeficientes reales no puede cambiar de signo en un intervalo sin anularse en él (teorema de Bolzano para los polinomios). Este teorema es también el fundamento de todos los criterios de separación de las raíces reales de un polinomio (con coeficientes reales) que constituyen uno de los temas favoritos del Algebra durante el siglo XIX[15]. A lo largo de estos trabajos no podía dejar de ponerse de manifiesto que era la estructura de orden de **R**, mucho más que su topología, quien desempeñaba el papel principal[16], por ejemplo, el teorema de Bolzano para los polinomios sigue siendo verdadero para el cuerpo de todos los números algebraicos reales. Esta corriente de ideas ha llegado a su coronación con la teoría abstracta de los cuerpos ordenados, creada por E. Artin y O. Schreier ([*7* b] y [*8* a y b]); uno de los resultados más importantes es sin duda el descubrimiento de que la existencia de una relación de orden en un cuerpo está ligada a propiedades puramente algebraicas de este cuerpo.

15 Acerca de estas cuestiones el lector podrá consultar, por ejemplo [*284*] o [*317* a], pp. 223-235.

16 La tendencia a atribuir un lugar preponderante a la estructura de orden de los números reales se pone también de manifiesto en la definición de los números reales por el procedimiento de las «cortaduras» de Dedekind, que es en el fondo un procedimiento aplicable a todos los conjuntos ordenados.

ALGEBRA CONMUTATIVA. TEORIA DE LOS NUMEROS ALGEBRAICOS

El álgebra conmutativa «abstracta» ha sido creada recientemente, pero su desarrollo solamente puede ser entendido en función de los de la teoría de los números algebraicos y la geometría algebraica, a los que debe su origen.

Se ha conjeturado de forma bastante verosímil que la famosa «demostración» que pretendía poseer Fermat de la imposibilidad de la ecuación $x^p + y^p = z^p$ para p primo impar y x, y, z enteros $\neq 0$, se basaría en la descomposición

$$(x + y)(x + \zeta y) \dots (x + \zeta^{p-1} y) = z^p$$

en el anillo $\mathbf{Z}[\zeta]$ (siendo $\zeta \neq 1$ una raíz p-ésima de la unidad) y en un razonamiento de divisibilidad en este anillo, suponiéndolo *principal*. En todo caso un razonamiento análogo aparece esbozado en Lagrange ([*191*], t. II, p. 531), y es mediante razonamientos de este género, con diversas variantes (sobre todo cambios de variable con el fin de rebajar el grado de la ecuación) como Euler ([*108* a], t. I, p. 488)[1] y Gauss ([*124* a], t. II, p. 387) demuestran el teorema

1 En su demostración, Euler procede como si $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ fuese principal, lo que no es cierto; sin embargo, su razonamiento puede hacerse correcto mediante la consideración del conductor de $\mathbf{Z}[\rho]$ (ρ raíz cúbica de la unidad) sobre $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ (cf. [*288*], p. 190).

de Fermat para $p = 3$, Gauss (*loc. cit.*) y Dirichlet ([*92*], t. I, p. 42) para $p = 5$, y Dirichlet la imposibilidad de la ecuación $x^{14} + y^{14} = z^{14}$ ([*92*], t. I, p. 190). Por último, Kummer, en sus primeros trabajos sobre la teoría de números, creyó obtener de este modo una demostración general, y sin duda este error (que le fue señalado por Dirichlet) le llevó a sus estudios sobre los cuerpos ciclotómicos, que le permitirían finalmente obtener una versión correcta de su demostración para los números primos $p < 100$ [*188* d].

Por otra parte, la célebre memoria de Gauss de 1831 sobre los residuos bicuadráticos, cuyos resultados se deducían a partir de un estudio detallado de la divisibilidad en el anillo $\mathbf{Z}[i]$ de los «enteros de Gauss» ([*124* a], t. II, p. 109), ponía claramente de manifiesto la importancia que podía tener para los problemas clásicos de la teoría de números la extensión de la noción de divisibilidad a los números algebraicos [2], y no resulta por tanto sorprendente el hecho de que entre 1830 y 1850 esta teoría haya sido objeto de numerosos trabajos de los matemáticos alemanes, primeramente Jacobi, Dirichlet y Eisenstein, y un poco más tarde Kummer y su amigo y discípulo Kronecker. No vamos a hablar aquí de la teoría de las unidades, parte muy específica de la teoría de números, cuyos progresos son rápidos, obteniendo Eisenstein la estructura del grupo de las unidades para los cuerpos cúbicos, y Kronecker para los cuerpos ciclotómicos, poco antes de que Dirichlet, en 1846 ([*92*], t. I, p. 640), demostrase el teorema general, al que casi había llegado por su parte Hermite ([*159*], t. I, p. 159). La cuestión, fundamental en toda la teoría, de la descomposición en factores primos, se presentaba como mucho más difícil. Desde que Lagrange había dado ejemplos de números de la forma $x^2 + Dy^2$ (x, y, D enteros) teniendo divisores que no son de la forma $m^2 + Dn^2$ ([*191*], t. II, p. 465), se sabía en sustancia que no se podía esperar, en general, que los anillos $\mathbf{Z}[\sqrt{-D}]$ fuesen principales, y a la temeridad de Euler había se-

[2] Los trabajos de Gauss sobre la división de la lemniscata y las funciones elípticas ligadas a esta curva, no publicados durante su vida, pero fechados hacia 1800, deberían haber llevado ya en esta época a reflexionar sobre las propiedades aritméticas del anillo $\mathbf{Z}[i]$, puesto que la división por los números de este anillo desempeña un papel importante en la teoría. Véase lo que dice Jacobi con este motivo ([*171*], t. VI, p. 275) así como los cálculos relativos a estas cuestiones encontrados entre los papeles de Gauss ([*124* a], t. II, p. 411; ver también [*124* a], t. X_2, pp. 33 y ss.).

guido una gran circunspección; por ejemplo, cuando Dirichlet demuestra que la relación $p^2 - 5q^2 = r^5$ (p, q, r enteros) equivale a $p + q\sqrt{5} = (x + y\sqrt{5})^5$ con x e y enteros, se limita a señalar en una nota que *«existen teoremas análogos para otros muchos números primos»* ([*92*], t. I, p. 31). Es cierto que con la memoria de Gauss de 1831 y el trabajo de Eisenstein sobre los residuos cúbicos [*102* a] se disponía de estudios extensos de la aritmética de los anillos principales $\mathbf{Z}[i]$ y $\mathbf{Z}[\rho]$ ($\rho = (-1 + i\sqrt{3})/2$, raíz cúbica de la unidad) en perfecta analogía con la teoría de los enteros racionales, y al menos, en estos ejemplos, la estrecha relación entre la aritmética de los cuerpos cuadráticos y la teoría de las formas cuadráticas binarias, desarrollada por Gauss, era muy clara, pero se carecía de un «diccionario» que permitiese tratar en el caso general el cuerpo cuadrático por medio de una simple traducción de la teoría de Gauss [3].

De hecho, el enigma no fue resuelto en primer lugar para los cuerpos cuadráticos, sino para los cuerpos ciclotómicos (y esto por razones que no se pondrían claramente de manifiesto hasta mucho más tarde (cf. p. 139)). En 1837, Kummer, que había sido analista en sus comienzos, se consagra a la aritmética de los cuerpos ciclotómicos, que no dejará de ocuparle de una forma casi exclusiva durante veinticinco años. Al igual que sus predecesores, estudia la divisibilidad en los anillos $\mathbf{Z}[\zeta]$ siendo ζ una raíz p-ésima de la unidad $\neq 1$ (p primo impar), y se da cuenta enseguida de que también aquí aparecen anillos no principales, impidiendo todo progreso en la extensión de las leyes de la aritmética [*188* a]. La luz no se hará hasta 1845, después de ocho años de esfuerzos, gracias a su definición de los «números ideales» [*188* c y d].

Lo que hace Kummer se reduce exactamente, en lenguaje moderno, a definir las *valoraciones* sobre el cuerpo $\mathbf{Q}[\zeta]$, que están en correspondencia biunívoca con los «números primos ideales», el «exponente» con el que figura uno de estos factores en la descomposición de un número $x \in \mathbf{Z}[\zeta]$ no es otra cosa que el valor en x de la valoración correspondiente. Teniendo en cuenta que los conjugados de x pertenecen también a $\mathbf{Z}[\zeta]$, y que su producto $N(x)$

[3] El lector encontrará una descripción detallada de esta correspondencia entre formas cuadráticas y cuerpos cuadráticos en [*288*], pp. 205-229.

(la «norma» de x)[4] es un entero racional, los «factores primos ideales» cuya definición debía darse deberían ser también «factores» de los números primos racionales, y para dar su definición, bastaría limitarse a decir que se trataba de los «divisores primos ideales» de un número primo $q \in \mathbf{Z}$. Para $q = p$, ya Kummer había demostrado en sustancia [*188* a] que el ideal principal $(1 - \zeta)$ era primo y que su potencia $(p-1)$-ésima era el ideal principal (p), este caso no planteaba ningún problema nuevo. Para $q \neq p$, la idea que parece haber servido de orientación a Kummer es la de remplazar la ecuación ciclotómica $\Phi_p(z) = 0$ por la congruencia $\Phi_p(u) \equiv 0$ (mod. q), dicho de otra manera, la de descomponer el polinomio ciclotómico $\Phi_p(\mathrm{X})$ *sobre el cuerpo* $\mathbf{F}_q$, asociando a cada factor irreducible de este polinomio un «factor primo ideal». Un caso sencillo (citado explícitamente en la Nota [*188* b] en la que Kummer anuncia sus resultados sin demostración) es el de $q \equiv 1$ (mod. p), si $q = mp + 1$ y si $\gamma \in \mathbf{F}_q$ es una raíz $(q-1)$-ésima primitiva de 1, se tiene en $\mathbf{F}_q[\mathrm{X}]$

$$\Phi_p(\mathrm{X}) = \prod_{k=1}^{p-1} (\mathrm{X} - \gamma^{km})$$

ya que $\gamma^{pm} = 1$. Asociando entonces a cada factor $\mathrm{X} - \gamma^{km}$ un «factor primo ideal» $\mathfrak{q}_k$ de q, Kummer dice que un elemento $x \in \mathbf{Z}[\zeta]$, de polinomio mínimo P sobre $\mathbf{Q}$, es *divisible por* $\mathfrak{q}_k$ si en $\mathbf{F}_q$ se tiene $\mathrm{P}(\gamma^{mk}) = 0$; es decir, en lenguaje moderno, escribe el anillo cociente

[4] La noción de norma de un número algebraico se remonta a Lagrange: si α_i $(1 \leq i \leq n)$ son las raíces de un polinomio de grado n, considera incluso la «forma norma» $\mathrm{N}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} (x_0 + \alpha_i x_1 + \ldots + \alpha_i^{n-1} x_{n-1})$ en las variables x_i, que sin duda le había sido sugerida por sus trabajos sobre la resolución de ecuaciones y las «resolventes de Lagrange» ([*191*], t. VII, p. 170). Hay que señalar que es la propiedad multiplicativa de la norma la que lleva a Lagrange a su identidad sobre las formas cuadráticas binarias, a partir de la cual obtendría Gauss la «composición» de estas formas ([*124* a], t. II, p. 522). Por otra parte, al comenzar la teoría de los números algebraicos hacia 1830, los problemas se presentan muy frecuentemente en la forma de resolución de ecuaciones $\mathrm{N}(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \lambda$ (en particular con $\lambda = 1$ para encontrar las unidades) o del estudio de las «formas normas» (también llamadas «formas descomponibles»), e incluso en algunos trabajos recientes se emplean con provecho las propiedades de las ecuaciones diofánticas particulares, principalmente en la teoría de los números ρ-ádicos (Skolem, Chabauty).

$\mathbf{Z}[\zeta]/q\mathbf{Z}[\zeta]$ como compuesto directo de cuerpos isomorfos a $\mathbf{F}_q$. Para $q \not\equiv 1$ (mod. p), los factores irreducibles de $\Phi_p(\mathrm{X})$ en $\mathbf{F}_q[\mathrm{X}]$ ya no son de primer grado, y sería necesario sustituir X en P(X) por raíces «imaginarias de Galois» de los factores de Φ_p en $\mathbf{F}_q[\mathrm{X}]$. Kummer soslaya esta dificultad pasando, como diríamos hoy, al *cuerpo de descomposición* K de q: si f es el entero más pequeño tal que $q^f \equiv 1$ (mod. p), y si se pone $p - 1 = ef$, K no es otra cosa que el subcuerpo de $\mathbf{Q}(\zeta)$ formado por los invariantes del subgrupo de orden f del grupo de Galois (cíclico de orden $p - 1$) de $\mathbf{Q}(\zeta)$ sobre $\mathbf{Q}$, dicho de otro modo, es el único subcuerpo de $\mathbf{Q}(\zeta)$ de grado e sobre $\mathbf{Q}$, siendo bien conocido desde las *Disquisitiones* de Gauss, y estando engendrado por los «periodos»

$$\eta_k = \zeta_k + \zeta_{k+e} + \zeta_{k+2e} + \ldots + \zeta_{k+(f-1)e}$$

$(0 \leq k \leq e - 1$, $\zeta_\nu = \zeta^{g^\nu}$, siendo g una raíz primitiva de la congruencia $z^{p-1} \equiv 1$ (mod. p)), que constituyen una base normal. Si R(X) es el polinomio mínimo (unitario y con coeficientes enteros racionales) de uno cualquiera de estos «periodos» η, Kummer, basándose en las fórmulas de Gauss, demuestra que R(X) sigue descomponiéndose sobre $\mathbf{F}_q$ en factores distintos de primer grado $\mathrm{X} - u_j$ $(1 \leq j \leq e)$ y es esta vez a los u_j a los que asocia un «factor primo ideal» $\mathfrak{q}_j$. Para definir la «divisibilidad por $\mathfrak{q}_j$», Kummer escribe todo $x \in \mathbf{Z}[\zeta]$ en la forma $x = \sum_{k=0}^{f-1} \zeta^k y_k$, escribiéndose cada $y_k \in \mathrm{K}$ de forma única como polinomio de grado $\leq e - 1$ en η con coeficientes enteros racionales, y dice que x es divisible por $\mathfrak{q}_j$ si, y solamente si, cuando se sustituye η por u_j en cada uno de los y_k, los elementos de $\mathbf{F}_q$ obtenidos son *todos* nulos. Pero todavía quedaba por definir el «exponente» de $\mathfrak{q}_j$ en x. Para ello introduce Kummer lo que llamaríamos ahora una *uniformizante* para $\mathfrak{q}_j$, es decir, un elemento $\rho_j \in \mathrm{K}$ tal que $\mathrm{N}(\rho_j) \equiv 0$ (mod. q), $\mathrm{N}(\rho_j) \not\equiv 0$ (mod. q^2) y, por último, tal que ρ_j sea divisible por $\mathfrak{q}_j$ (en el sentido arriba definido) y no lo sea por *ningún otro* factor ideal $\neq \mathfrak{q}_j$ de q. La existencia de un ρ_j cumpliendo estas condiciones había sido probada en lo esencial por Kronecker en su disertación del año anterior ([*186* a], t. I, p. 23); escribiendo entonces $\rho_j' \neq \mathrm{N}(\rho_j)/\rho_j$, Kummer dice que el exponente de $\mathfrak{q}_j$ en x es igual a h si se tiene $x\rho_j'^h \equiv 0$ (mod. q^h) pero $x\rho_j'^{h+1} \not\equiv 0$ (mod. q^{h+1}); empieza desde

luego, por demostrar que la relación $x\rho_j' \equiv 0$ (mod. q) equivale al hecho de que x es divisible por $\mathfrak{q}_j$ (en el sentido anterior). Una vez dadas estas definiciones, la extensión a $\mathbf{Z}[\zeta]$ de las leyes usuales de la divisibilidad para los «números ideales» no presentaba ninguna dificultad seria, y ya incluso en su primera memoria [*188* a] pudo Kummer, empleando el «método de los cajones» de Dirichlet, demostrar que solo existía un número *finito* de «clases» de «factores ideales»[5].

No vamos a continuar aquí la historia de los trabajos posteriores de Kummer sobre los cuerpos ciclotómicos, en lo referente a la determinación del número de clases y la aplicación a la demostración del teorema de Fermat en distintos casos. Unicamente mencionaremos la manera en que extiende su método en 1859 para obtener (al menos parcialmente) los números primos ideales en un «cuerpo kummeriano» $\mathbf{Q}(\zeta, \mu)$ donde μ es una raíz de un polinomio irreducible $P(X) = X^p - \alpha$, con $\alpha \in \mathbf{Z}[\zeta]$ [*188* e]. Resulta interesante el hecho de que Kummer aborde el problema considerando precisamente $\mathbf{Q}(\zeta, \mu)$ como una extensión cíclica *del cuerpo* $\mathbf{Q}(\zeta)$ tomado como «cuerpo de base»[6]: parte de un «número primo ideal» $\mathfrak{q}$ de $\mathbf{Z}[\zeta]$, que supone no es divisor de p ni de α, y, esta vez, examina (en términos modernos) el polinomio $\bar{P}(X) = X^p - \bar{\alpha}$ en el *cuerpo residual* k de la valoración de $\mathbf{Q}(\zeta)$ correspondiente a $\mathfrak{q}$ (siendo $\bar{\alpha}$ la imagen canónica de α en k). Como $\mathbf{Q}(\zeta)$ es el cuerpo de las raíces p-ésimas de la unidad. $\bar{P}$ es, o bien irreducible sobre k, o bien producto de factores de primer grado. En el primer caso, Kummer dice que $\mathfrak{q}$ sigue siendo primo en $\mathbf{Z}[\zeta, \mu]$, en el segundo, introduce los elementos w_i $(1 \leq i \leq p)$ de $\mathbf{Z}[\zeta]$

[5] No hace aquí otra cosa que recoger un razonamiento incluido por Kronecker en su disertación, relativo a las clases de soluciones de ecuaciones de la forma $N(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = a$ ([*188* a], t. II, p. 25). Por otra parte, Kummer alude varias veces a los resultados que habría obtenido Dirichlet acerca de las ecuaciones de este tipo (para un cuerpo de números algebraicos cualesquiera), pero estos resultados, ni han sido publicados, ni han sido encontrados entre los papeles de Dirichlet.

[6] En distintos lugares de su memoria sobre las formas cuadráticas con coeficientes en el anillo de los enteros de Gauss ([*92*], t. I, pp. 533-618) había considerado Dirichlet la norma relativa del cuerpo $\mathbf{Q}(\sqrt{D}, i)$ sobre su subcuerpo cuadrático $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$. Igualmente, Eisenstein, al estudiar las raíces de orden 8 de la unidad, considera el cuerpo engendrado por ellas como extensión cuadrática de $\mathbf{Q}(i)$ y emplea la norma relativa a este subcuerpo ([*102* b], p. 253). Pero el trabajo de Kummer es el primer ejemplo de estudio aritmético profundo de un «cuerpo relativo».

cuyas imágenes en k son las raíces de $\bar{P}$, y asocia a cada índice i un factor primo ideal $\mathfrak{r}_i$ de $\mathfrak{q}$, y escribiendo a continuación

$$W_i(X) = \prod_{j \neq i} (X - w_j),$$

dice que, para un polinomio f con coeficientes en $\mathbf{Z}[\zeta]$, $f(\mu)$ contiene m veces el factor ideal $\mathfrak{r}_i$ si se tiene

$$f(w_i)W_i^m(w_i) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \mathfrak{q}^m)$$

pero

$$f(w_i)W_i^{m+1}(w_i) \not\equiv 0 \qquad (\text{mod. } \mathfrak{q}^{m+1}).$$

Resumiendo, Kummer obtiene de esta manera las valoraciones de $\mathbf{Q}(\zeta, \mu)$ *no ramificadas* sobre $\mathbf{Q}$, lo que le basta para las aplicaciones que le interesan.

Kummer había tenido la gran suerte de encontrarse en el estudio de los cuerpos particulares a los que le habían llevado sus trabajos sobre el teorema de Fermat con numerosas circunstancias fortuitas que hacían su estudio mucho más accesible. La extensión al caso general de los resultados de Kummer presentaba dificultades considerables y costaría muchos años de esfuerzos.

La historia de la teoría de los números algebraicos durante los cuarenta años que siguen al descubrimiento de Kummer, no deja de recordar con Kronecker y Dedekind, que desempeñan los papeles principales, la de la rivalidad de Newton y Leibniz 180 años antes (aunque felizmente sin la misma acritud) sobre la invención del Cálculo infinitesimal. Discípulo y muy pronto colega de Kummer en Berlín, Kronecker (cuya tesis, como acabamos de ver, le había ayudado en un punto esencial de su teoría) se interesaba mucho por los «números ideales» con vistas a emplearlos en sus propios trabajos, y nos admira su extraordinaria agudeza cuando le vemos ya en 1853 ([*186* a], t. IV, p. 10) enunciar el teorema general sobre las extensiones abelianas de $\mathbf{Q}$, y, lo que es quizá todavía más extraordinario, crear en los años siguientes la teoría de la multiplicación compleja y descubrir la primera idea de la teoría de los cuerpos de clases ([*186* a], t. IV, pp. 177-183 y 207-217). Una carta de Kronecker a Dirichlet, en 1857 ([*186* a], t. V, pp. 418-421), nos le muestra ya en esta época

en posesión de una generalización de la teoría de Kummer, lo que servirá además para reafirmar al propio Kummer en sus propios trabajos ([*188* e], p. 57), y Kronecker aludirá muchas veces a esta teoría en sus memorias comprendidas entre 1860 y 1880[7].

Pero aunque en esta época ninguno de los matemáticos de la escuela alemana de teoría de números dejase de ignorar la existencia de estos trabajos de Kronecker, este último parece haber comunicado solamente a un círculo restringido de amigos y discípulos los principios de sus métodos, y cuando se decide por fin a publicarlos, en su memoria de 1881 sobre el discriminante ([*186* a], t. II, pp. 193-236) y sobre todo en su gran «Festschrift» de 1882 ([*186* a], t. II, pp. 237-387), Dedekind no puede por menos de manifestar su sorpresa ([*79*], t. III, p. 427), pensando que se trataba de procedimientos totalmente diferentes, de acuerdo con los ecos que le habían llegado ([*79*], t. III, p. 287). Por otra parte, Kronecker estaba lejos de poseer en el mismo grado la extraordinaria claridad de exposición de Dedekind, y no tiene, por tanto, nada de sorprendente que fuesen sobre todo los métodos de este último, ya publicados en 1871, los que formasen el andamiaje de la Teoría de Números Algebraicos. Por interesante que pueda resultar, el método de «adjunción de indeterminadas» de Kronecker, en lo que se refiere a la Teoría de Números, solo es a nuestros ojos una variante del de Dedekind, y es en otra dirección, orientada hacia la Geometría algebraica, donde las ideas de Kronecker adquieren toda su importancia para la historia del Algebra conmutativa, como veremos más adelante.

Debido a razones que no podían aparecer claras hasta mucho más tarde, un primer paso previo a todo ensayo de teoría general era desde luego la clarificación de la noción de entero algebraico. Esta noción surge hacia 1845-50, y aunque sea bastante difícil dar la fecha exacta de su aparición, parece verosímil creer que fue la idea de sistema estable para la adición y la multiplicación (o, más exactamente, lo que llamamos ahora una **Z**-álgebra de rango finito) la que dio lugar más o menos conscientemente a la definición de los enteros algebraicos; resulta en efecto imposible no llegar a esta definición cuando se impone a una **Z**-álgebra de la forma **Z**[θ] la

7 Acerca de la evolución de sus ideas sobre el tema, ver la muy interesante introducción de su memoria de 1881 sobre el discriminante ([*186* a], t. II, p. 195).

condición de ser de rango finito, por analogía con el anillo **Z**[ζ] engendrado por una raíz de la unidad, que atraía la atención de todos los aritméticos de esta época. Hay que considerar también que cuando, de manera independiente, Dirichlet ([*92*], t. I, p. 640), Hermite ([*159*], t. I, pp. 115 y 146) y Eisenstein ([*102* c], p. 236), introducen la noción de entero algebraico, no parece que consideren que se trate de una idea nueva, ni que consideren útil estudiarla detalladamente; Eisenstein es el único que demuestra en sustancia que la suma y el producto de dos enteros algebraicos son enteros algebraicos, sin pretender por otra parte que dicho resultado fuese original.

Un punto mucho más oscuro era la determinación de los anillos para los que se podía esperar generalizar la teoría de Kummer. Este último, en su primera nota [*188* b], no vacila en afirmar que con su método puede volver a encontrarse la teoría de las formas cuadráticas binarias de Gauss considerando los anillos $\mathbf{Z}[\sqrt{D}]$ (D entero); Kummer no desarrolló nunca esta idea, pero parece que ni él, ni nadie antes de Dedekind, se dio cuenta de que la descomposición única en factores primos «ideales» no es posible en los anillos $\mathbf{Z}[\sqrt{D}]$ cuando $D \equiv 1 \pmod{4}$ (aunque el ejemplo de las raíces cúbicas de la unidad mostrase que el anillo **Z**[ρ] considerado desde Gauss es distinto de $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$)[8]. Antes de Dedekind y Kronecker los únicos anillos estudiados son del tipo **Z**[θ], o a veces, ciertos anillos particulares del tipo **Z**[θ,θ′][9]. En lo que a Kronecker se refiere, es posible que la idea de considerar el anillo de *todos* los enteros de una extensión algebraica, le fuese sugerida primeramente por el estudio de los cuerpos de funciones algebraicas, en el que este anillo se introduce de una manera natural como el conjunto de funciones «finitas a

8 Aunque Kronecker debió sentirse llevado a estudiar la aritmética de los anillos $\mathbf{Z}[\sqrt{-D}]$ $(D > 0)$ por sus trabajos sobre la multiplicación compleja, no publicó nada sobre este tema, y la caracterización de los enteros de un cuerpo cuadrático cualquiera $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ es dada explícitamente por primera vez por Dedekind en 1871 ([*79*], t. I, pp. 105-106).

9 Hemos visto más arriba el ejemplo del anillo **Z**[ζ, μ] introducido por Kummer [*188* e]. Anteriormente, Eisenstein había considerado un subanillo engendrado por dos elementos del anillo de los enteros en el cuerpo de las raíces de orden 21 de la unidad [*102* b].

distancia finita»; en cualquier caso, Kronecker, en su memoria de 1881 sobre el discriminante (escrita y anunciada a la Academia de Berlín, ya en 1862), insiste en esta caracterización de los «enteros» de estos cuerpos ([*186* a], t. II, pp. 193-236). Dedekind no da ninguna indicación relativa al origen de sus propias ideas sobre este punto, pero ya desde sus primeras publicaciones sobre los cuerpos de números en 1871, el anillo de todos los enteros de uno de estos cuerpos desempeña un papel fundamental en su teoría; es también Dedekind quien clarifica la relación entre uno de estos anillos y aquéllos de sus subanillos con el mismo cuerpo de fracciones, mediante la introducción de la noción de *conductor* ([*79*], t. I, pp. 105-157).

Pero ésta no era la única dificultad. Para poder generalizar las ideas de Kummer había que empezar por prescindir del empleo de los cuerpos de descomposición, que naturalmente no tenían correspodencia en el caso de un cuerpo no abeliano. Además, este procedimiento parece a primera vista sorprendente y artificial, ya que si se parte del polinomio irreducible $\Phi_p(X)$ de $\mathbf{Z}[X]$ puede uno preguntarse por qué Kummer no lleva hasta el final las consecuencias lógicas de sus ideas y qué es lo que le impide emplear la teoría de los «imaginarios de Galois», bien conocida en aquella época. El obstáculo aparece con mucha más claridad a luz de un intento de generalización poco afortunado realizado en 1865 por Selling, discípulo de Dedekind: dado un polinomio irreducible $P \in \mathbf{Z}[X]$, Selling descompone el polinomio correspondiente $\bar{P}(X)$ en factores irreducibles en $\mathbf{F}_q[X]$, por tanto, las raíces de este polinomio pertenecen a una extensión finita $\mathbf{F}_r$ de $\mathbf{F}_q$, pero Selling, para definir a la manera de Kummer el exponente de un «factor primo ideal» de q en un entero del cuerpo de las raíces de $P(X)$ no duda en hablar *en el cuerpo* $\mathbf{F}_r$, de congruencias módulo una *potencia de* q ([*282*], p. 26); y un poco después, cuando intenta abordar la cuestión de la ramificación, «añade» a $\mathbf{F}_r$ «raíces imaginarias» de una ecuación de la forma $x^h = q$ ([*282*], p. 34). Está claro que estos atrevimientos (que podrían justificarse sustituyendo el cuerpo finito $\mathbf{F}_q$ por el cuerpo q-ádico) solamente podían dar lugar en esta época a conclusiones sin sentido. Afortunadamente, Dedekind acababa de considerar, en 1857 ([*79*], t. I, pp. 40-66), desde otro punto de vista la teoría de los cuerpos finitos [10], con el nombre de «teoría de las congruencias superiores»: interpretando los elementos de estas últimas como restos de polinomios de $\mathbf{Z}[X]$, según un «módulo doble» formado por las combinaciones lineales, con coeficientes en $\mathbf{Z}[X]$ de un número primo p y de un polinomio unitario irreducible $P \in \mathbf{Z}[X]$ (lo que dio lugar, sin duda alguna, tanto en él mismo como en Kronecker, a la idea general de *módulo* a la que llegarán independientemente un poco más tarde). Según su propio testimonio ([*79*], t. I, p. 218) parece que Dedekind empezó por atacar el problema de los «factores ideales» de p en un cuerpo $\mathbf{Q}(\xi)$, en el que $P \in \mathbf{Z}[X]$ es el polinomio mínimo de ξ, de la forma siguiente (al menos en el caso «no ramificado», es decir, cuando el polinomio $\bar{P}$ correspondiente a P no tiene raíces múltiples en $\mathbf{F}_p(X)$): se escribe, en $\mathbf{Z}[X]$

$$P = P_1 P_2 \ldots P_h + p.G$$

siendo los $\bar{P}_i$ irreducibles y distintos en $\mathbf{F}_p[X]$; se puede suponer que G no es divisible (en $\mathbf{Z}[X]$) por ninguno de los P_i, y se escribe para todo i, $W_i = \prod_{j \neq i} P_j$; entonces, si $f \in \mathbf{Z}[X]$, diremos que $f(\xi)$ contiene k veces el «factor ideal» $\mathfrak{p}_i$ de p correspondiente a P_i si se tiene

$$fW_i^k \equiv 0 \qquad (\text{mods. } p^k, P)$$

y

$$fW_i^{k+1} \not\equiv 0 \qquad (\text{mods. } p^{k+1}, P).$$

El parentesco con el método seguido por Kummer para los «cuerpos kummerianos» se advierte aquí muy claramente, y de esta forma se puede igualmente llegar con facilidad a la definición inicial de Kummer para los cuerpos ciclotómicos (véase, por ejemplo, el trabajo de Zolotareff [*343*], que, al principio independientemente de Dedekind, desarrolla estas ideas un poco más tarde).

Sin embargo, ni Dedekind ni Kronecker, que parece haber hecho también intentos análogos, seguirían avanzando por este camino, siendo ambos detenidos por las dificultades planteadas por la ramifi-

[10] Se sabe que algunos resultados de esta teoría, publicados primeramente por Galois, habían sido obtenidos (en el lenguaje de las congruencias) por Gauss hacia 1800. Después de la muerte de Gauss, Dedekind se había encargado de la publicación de una parte de sus obras y había encontrado en particular entre los papeles dejados por Gauss la memoria sobre los cuerpos finitos ([*124* a], t. II, pp. 212-240).

cación ([*79*], t. I, p. 218 y [*186* a], t. II, p. 325)[11]. Si el anillo A de los enteros del cuerpo K de números que se considera admite una base (sobre **Z**) formada por las potencias de un mismo entero θ, no resulta difícil generalizar el método anterior para los números primos ramificados en **Z**[θ] (como indica Zolotareff, *loc. cit.*). Pero hay cuerpos K cuyo anillo A no posee ninguna base de este tipo, y Dedekind terminó incluso por descubrir que hay casos en los que ciertos números primos *p* (los «factores extraordinarios del discriminante» del cuerpo K) son tales que, *cualquiera que sea* θ ∈ A, la aplicación del método anterior al polinomio mínimo de θ sobre **Q** llevaría a dar a *p* factores ideales múltiples, mientras que *p* no se ramifica de hecho en A[12]; Dedekind confiesa haberse detenido largo tiempo ante esta dificultad imprevista, antes de conseguir superarla creando en todos sus detalles la teoría de los módulos y de los ideales, expuesta de forma magistral (y ya totalmente moderna, en oposición al estilo discursivo de sus contemporáneos) en la que es sin duda su obra maestra, el famoso «Suplemento XI» al libro de Dirichlet sobre la Teoría de Números ([*79*], t. III, pp. 1-222). Esta obra tendrá tres versiones sucesivas, pero ya en la primera (publicada como «Suplemento X» a la segunda edición del libro de Dirichlet, en 1871) está incluido lo esencial del método, y la teoría de los números algebraicos pasa casi de una vez de los esbozos y tanteos anteriores a ser una disciplina en plena madurez y en posesión de sus herramientas fundamentales. Ya desde el comienzo, el anillo de todos los enteros de un cuerpo de números ocupa un lugar central en la teoría, Dedekind demuestra la existencia de una base sobre **Z** de este anillo, y a partir de aquí deduce la definición de discriminante del cuerpo como el cuadrado del determinante formado por los elementos de una base del anillo de los enteros y de sus conjugados; sin embargo, en el suplemento XI solamente da la caracterización de los números primos

[11] Zolotareff soslaya la dificultad mediante un refinamiento de su método, que no parece presentar más que un interés anecdótico [*343*].

[12] Kronecker afirma haber encontrado el mismo fenómeno en un subcuerpo del cuerpo de las raíces de orden 13 de la unidad, subcuerpo que además no precisa ([*186* a], t. II, p. 384). El ejemplo de factor extraordinario del discriminante dado por Dedekind es tratado en detalle en [*150* d], p. 333; un poco más adelante da Hasse un ejemplo de cuerpo K en el que no hay factores extraordinarios en el discriminante, pero en el que no existe ningún θ ∈ A tal que A = **Z**[θ] ([*150* d], p. 335).

ramificados (como factores primos del discriminante) para los cuerpos cuadráticos ([*79*], t. III, p. 202), aunque estaba en posesión del teorema general desde 1871[13]. El resultado fundamental de la obra es el teorema de existencia y unicidad de la descomposición de los ideales en factores primos, para el que Dedekind empieza por elaborar una teoría elemental de los «módulos»; de hecho, en el suplemento XI, reserva este nombre para los sub-**Z**-módulos de un cuerpo de números, pero la concepción que tiene de ellos y los resultados que demuestra están ya expuestos en una forma inmediatamente aplicable a los módulos más generales[14]; hay que señalar, entre otras cosas, y ya desde 1871, la introducción de la noción de «transportador», que desempeña un papel importante (así como la «condición de cadena ascendente») en la primera demostración del teorema de factorización única. En las dos ediciones siguientes, Dedekind daría aún otras dos demostraciones de este teorema, que consideraba con razón como el punto fundamental de su teoría. Hay que señalar aquí que en la tercera demostración intervienen los ideales fraccionarios (ya introducidos en 1859 por Kummer para los cuerpos ciclotómicos) y el hecho de que formen un *grupo*; más adelante volveremos a ocuparnos de la segunda demostración (p. 150).

Todos estos resultados (salvo el lenguaje) eran ya conocidos, sin duda, por Kronecker, hacia 1860, como casos particulares de sus concepciones mucho más generales, de las que hablaremos más abajo (mientras que Dedekind reconoce no haber superado las últimas dificultades de su teoría hasta 1869-70 ([*79*], t. I, p. 351))[15]. En lo que se refiere a los cuerpos de números, hay que señalar en particular que ya desde esta época sabía Kronecker que toda la teoría es aplicable sin cambios esenciales cuando se parte de un «cuerpo de base» *k* que es un cuerpo de números (distinto de **Q**),

[13] No publicó la demostración de este teorema hasta su memoria de 1882 sobre la «diferente» ([*79*], t. I, pp. 351-396).

[14] En su memoria de 1882 sobre las curvas algebraicas (escrita juntamente con H. Weber) [*80*] utiliza de la misma manera la teoría de los módulos sobre el anillo **C**[X].

[15] Sin embargo, Kronecker no había conseguido obtener con sus métodos la caracterización completa de los ideales ramificados en el caso de los cuerpos de números. Está en posesión de esta caracterización, por el contrario, para los cuerpos de funciones algebraicas de una variable, y demuestra además que en este caso no hay «factores extraordinarios» del discriminante ([*186* a], t. II, pp. 193-236).

punto de vista al que conducía de modo natural la teoría de la multiplicación compleja; de este modo había reconocido, para ciertos cuerpos k, la existencia de extensiones algebraicas $K \neq k$ *no ramificadas* sobre k ([*186* a], t. II, p. 269) lo que no puede suceder para $k = \mathbf{Q}$ (como se deduce de las minoraciones de Hermite y Minkowski para el discriminante). Dedekind no desarrollaría nunca este último punto de vista (aunque indique su posibilidad en su memoria de 1882 sobre la diferente), y la primera exposición sistemática de la teoría del «cuerpo relativo» se debe a Hilbert ([*163* a], t. I, pp. 63-363).

Por último, en 1882 ([*79*], t. I, pp. 359-396), Dedekind completa la teoría mediante la introducción de la *diferente*, lo que le proporciona una nueva definición del discriminante y le permite precisar los exponentes de los factores primos ideales en la descomposición de este último. Es también hacia esta época cuando se interesa por las peculiaridades presentadas por las extensiones de Galois, introduciendo las nociones de grupo de descomposición y de grupo de inercia (en una memoria ([*79*], t. II, pp. 43-48) que no fue publicada hasta 1894) e incluso (en papeles no publicados hasta después de su muerte ([*79*], t. II, pp. 410-411)) un esbozo de los grupos de ramificación, que Hilbert (independientemente de Dedekind) desarrollaría un poco después ([*163* a], t. I, pp. 13-23 y 63-363).

De este modo, la teoría de los números algebraicos ha completado, hacia 1895, la primera etapa de su desarrollo; las herramientas forjadas a lo largo de este periodo de formación le permitirán abordar casi inmediatamente la etapa siguiente, la teoría general de los cuerpos de clases (o, lo que viene a ser lo mismo, la teoría de las extensiones abelianas de los cuerpos de números) que se prolonga hasta nuestros días y de la que no vamos a hablar aquí. En lo que se refiere al Algebra conmutativa, podemos decir que hacia la misma época la teoría de los anillos de Dedekind está prácticamente hecha, dejando aparte su caracterización axiomática, así como la estructura de los módulos de tipo finito sobre estos anillos (que, para el caso de los cuerpos de números, no será dilucidada, en lo fundamental, hasta 1912, por Steinitz [*294* b])[16].

[16] El estudio de los módulos sobre un anillo de enteros algebraicos ya había sido iniciado por Dedekind ([*79*], t. II, pp. 59-85).

Los avances posteriores del Algebra conmutativa estarán originados en general por problemas bastante diferentes, surgidos dentro de la Geometría algebraica (que además influirá de manera directa sobre la Teoría de Números, antes incluso de los desarrollos «abstractos» de la época contemporánea).

No vamos a hacer aquí la historia detallada de la Geometría algebraica, que, hasta la muerte de Riemann, no afecta demasiado a nuestros problemas. Baste recordar que su finalidad principal es el estudio de las curvas algebraicas en el plano proyectivo complejo, realizado casi siempre empleando los métodos de la Geometría proyectiva (con o sin coordenadas). Paralelamente, había ido desarrollándose, con Abel, Jacobi, Weierstrass y Riemann, la teoría de las «funciones algebraicas» de una variable compleja y de sus integrales. Evidentemente existía una conciencia de la relación entre esta teoría y la geometría de las curvas algebraicas planas, y se sabía, si hacía falta, «aplicar el Análisis a la Geometría», pero los métodos empleados en el estudio de las funciones algebraicas eran fundamentalmente de naturaleza «trascendente», antes incluso de Riemann[17], y este carácter se acentúa todavía más en los trabajos de este último, con la introducción de las «superficies de Riemann» y de las funciones analíticas cualesquiera definidas sobre una de estas superficies. Casi inmediatamente después de la muerte de Riemann, Roch, y sobre todo Clebsch, se dieron cuenta de la posibilidad de obtener, a partir de los profundos resultados obtenidos por los métodos trascendentes de Riemann, numerosas e importantes aplicaciones a la Geometría proyectiva de las curvas, lo que debería incitar naturalmente a los geómetras contemporáneos a dar demostraciones puramente «geo-

[17] Hay que señalar, sin embargo, que Weierstrass, en sus trabajos sobre las funciones abelianas (que se remontan a 1857, pero que no fueron expuestos en sus cursos hasta 1865, y solamente fueron publicados en sus Obras Completas [*329* a], t. IV)), da, contrariamente a Riemann, una definición puramente algebraica del género de una curva como el menor de los enteros p tales que existan funciones racionales sobre la curva teniendo como polos $p + 1$ puntos arbitrarios dados. Es interesante señalar que, intentando encontrar elementos que desempeñasen el papel de funciones con un único polo sobre la curva, Weierstrass, antes de emplear con este fin funciones trascendentes, había incitado a Kronecker, según el testimonio de este último ([*186* a], t. II, p. 197), a extender a las funciones algebraicas de una variable los resultados que acababa de obtener en aquella época sobre los cuerpos de números (los «factores primos ideales» desempeñaban efectivamente el papel deseado por Weierstrass).

métricas» de estos resultados. Este programa, seguido a medias por Clebsch y Gordan, fue llevado a cabo por Brill y M. Noether algunos años después [37], mediante el estudio de sistemas de puntos variables sobre una curva dada y de curvas auxiliares (las «adjuntas») pasando por tales sistemas de puntos. Pero, incluso para los mismos contemporáneos, los métodos trascendentes de Riemann (y, sobre todo, su empleo de las nociones topológicas y del «principio de Dirichlet») parecían apoyarse sobre unos fundamentos no muy firmes, y aunque Brill y Noether fuesen más cuidadosos que la mayoría de los geómetras sintéticos contemporáneos (ver más adelante p. 149) sus razonamientos analítico-geométricos podrían ser objeto de reproches. Con la finalidad fundamental de dar a la teoría de las curvas algebraicas una base más sólida, publican Dedekind y Weber, en 1882, su gran memoria sobre el tema [80]: «*Los trabajos expuestos más abajo* —dicen— «*tienen la finalidad de fundamentar la teoría de las funciones algebraicas de una variable, una de las creaciones principales de Riemann, de una manera sencilla, rigurosa, y totalmente general a la vez. En los trabajos anteriores sobre este tema, se hacen, en general, hipótesis restrictivas sobre las singularidades de las funciones consideradas, y los posibles casos excepcionales son, o bien mencionamos de paso como casos límites, o bien totalmente ignorados. De la misma manera son admitidos algunos teoremas fundamentales sobre la continuidad o la analiticidad cuya «evidencia» se basa en intuiciones geométricas de diversa naturaleza*» ([80], p. 181)[18]. La idea fundamental de su trabajo es la de calcar la teoría de las funciones algebraicas de una variable sobre la Teoría de los números algebraicos, tal y como acababa de desarrollarla Dedekind; para llevar a cabo esta idea,

[18] Es sabido que, a pesar de los esfuerzos de Dedekind, Weber y Kronecker, la relajación en la concepción de en qué consistía realmente una demostración correcta, ya apreciable en la escuela alemana de Geometría de los años 1870-1880, no haría otra cosa que agravarse cada vez más con los trabajos de los geómetras franceses, y sobre todo italianos, de las dos generaciones siguientes, que, siguiendo la línea de los geómetras alemanes, y desarrollando sus métodos, abordan la teoría de las superficies algebraicas: «escándalo» muchas veces denunciado (sobre todo a partir de 1920) por los algebristas, pero que no dejaban de justificar en cierta medida los brillantes éxitos obtenidos con estos métodos «no rigurosos», en contraste con el hecho de que los sucesores ortodoxos de Dedekind fueran incapaces, hasta 1940, más o menos, de formular nociones algebraicas suficientemente flexibles y potentes para poder dar demostraciones de estos resultados.

era necesario, en primer lugar, adoptar el punto de vista «afín» (contrariamente a sus contemporáneos, que consideraban las curvas como sumergidas en el espacio proyectivo complejo). Parten, pues, de una extensión algebraica finita **K** del cuerpo **C**(X) de las fracciones racionales, y del anillo A de las «funciones algebraicas enteras» en **K**, es decir, de los elementos de este cuerpo entero sobre el anillo **C**[X] de los polinomios; su resultado fundamental, que obtienen sin utilizar ninguna consideración topológica[19], es que A es un anillo de Dedekind, al que aplican *mutatis mutandis* (e incluso de una forma más sencilla, como señalan Dedekind y Weber, sin ver todavía claramente la razón de ello ([79], t. I, p. 268)) todos los resultados del «suplemento XI». Una vez hecho esto, demuestran que sus teoremas son birracionalmente invariantes, es decir, que dependen solamente del cuerpo K, y en particular no dependen de la elección de la «recta del infinito» hecha al principio. Lo que para nosotros resulta, sin duda, todavía más interesante, es que, al querer definir los puntos de la «superficie de Riemann» correspondiente a K (y en particular los «puntos del infinito», que no podían corresponder a ideales de A), se vieron llevados a introducir la noción de *lugar* del cuerpo K. De este modo, se encuentran ante la misma situación que volverá a encontrar Gelfand, en 1940, para fundar la teoría de las álgebras normadas, a saber, un conjunto K de elementos que no son dados en principio como funciones, pero que, sin embargo, se quiere considerar como tales, y para obtener el conjunto de definición de estas funciones hipotéticas, tienen por primera vez la idea (que será recogida por Gelfand, y que se ha convertido en trivial a fuerza de emplearse con cualquier motivo en la matemática moderna) de asociar a un punto x de un conjunto E y a un conjunto $\mathfrak{F}$ de aplicaciones de E en un conjunto G, la aplicación $f \to f(x)$ de $\mathfrak{F}$ en G, dicho de otro modo, de considerar en la expresión $f(x)$, *f como variable y x como fija*, al revés de la tradición clásica. Finalmente, no les cuesta demasiado trabajo, partiendo de la noción de lugar, definir los «divisores positivos» («Polígono» en su terminología), que comprenden como casos particulares los ideales

[19] Dedekind y Weber subrayan que, gracias a este hecho, todos sus resultados continúan siendo válidos si se sustituye el cuerpo **C** por el cuerpo de todos los números algebraicos ([79], t. I, p. 240).

de A, y que corresponden a los «sistemas de puntos» de Brill y Noether; pero, aunque escriban los divisores principales y los divisores de diferenciales como «cocientes» de divisores positivos, no dan la definición general de *divisores*, y esta noción no será introducida hasta 1902 por Hensel y Lansberg, por analogía con los ideales fraccionarios. Noción ésta que no dejará de molestar permanentemente a los partidarios de métodos puramente «geométricos» (obligados a su pesar a bautizarlos con el nombre de «sistemas virtuales», y molestos por no poder darles una interpretación «concreta»).

El mismo año de 1882 aparece también la gran memoria de Kronecker esperada desde hacía más de veinte años ([*186* a], t. II, pp. 237-387). Mucho más ambiciosa que el trabajo de Dedekind-Weber, es también, desgraciadamente, mucho más vaga y oscura. Su tema central es (en lenguaje moderno) el estudio de los ideales de un álgebra finita íntegra sobre uno de los anillos de polinomios $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$ o $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$; Kronecker se limita *a priori* a aquellos ideales que son de tipo finito (el hecho de que lo sean *todos* no sería probado hasta algunos años después —para los ideales de $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$— por Hilbert a lo largo de sus trabajos sobre los invariantes ([*163* a], t. II, pp. 199-257)). En lo que se refiere a $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$ o $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$, parecía natural asociar a todo ideal de uno de estos anillos la «variedad algebraica» formada por los ceros comunes a todos los elementos del ideal, y los estudios de geometría en dimensiones 2 y 3 hechos en el siglo XIX deberían llevar intuitivamente a la idea de que toda variedad es reunión de variedades «irreducibles» en número finito, cuyas «dimensiones» no son necesariamente iguales. La demostración de este hecho parece ser la finalidad perseguida por Kronecker, aunque no se indique explícitamente en ninguna parte, y aunque en su memoria no se pueda encontrar ninguna definición de «variedad irreducible» ni de «dimensión». De hecho, se limita a indicar sumariamente cómo un método general de eliminación[20] proporciona, a partir de un sistema de generadores del ideal

[20] Mediante un cambio lineal de coordenadas, puede suponerse que los generadores F_i $(1 \leq i \leq r)$ del ideal son polinomios cuyo término de mayor grado en X_1 es de la forma $c_i X_1^{m_i}$, siendo c_i una constante $\neq 0$. Puede suponerse también que los F_i no tienen ningún factor común. Se considera entonces para $2r$ indeterminadas u_i, v_i $(1 \leq i \leq r)$ los polinomios $\sum_{i=1}^{r} u_i F_i$ y $\sum_{i=1}^{r} v_i F_i$, en tanto que *polinomios* en X_1, se forma

considerado, un número finito de variedades algebraicas, para cada una de las cuales, en un sistema de coordenadas conveniente, un cierto número de coordenadas son arbitrarias, y las otras son «funciones algebraicas» de ellas[21]. Pero, si el fin perseguido por Kronecker es realmente la descomposición en variedades irreducibles, hay que reconocer que solamente es alcanzado en el caso elemental de un ideal *principal*, para el que prueba en sustancia, extendiendo un lema clásico de Gauss para $\mathbf{Z}[X]$ ([*124* a], t. I, p. 34), que los anillos $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$ y $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ son factoriales; y, en el caso general, surge incluso la pregunta de si Kronecker estaba en posesión de la noción de ideal primo (lo que él llama «Primmodulsystem» es un ideal *no descomponible en producto* de otros dos ([*186* a], t. II, p. 336) y esto es tanto más sorprendente en cuanto que la definición dada desde 1871 por Dedekind era totalmente general). Por otra parte, Kronecker corregiría un poco más tarde esta inadvertencia.

Hay que señalar sin embargo que el método de eliminación de Kronecker, convenientemente aplicado, conducía efectivamente a la descomposición de una variedad algebraica en sus componentes irreducibles, resultado establecido con toda claridad por E. Lasker en el comienzo de su gran memoria de 1905 sobre los ideales de polinomios [*194*]. Lasker define correctamente la noción de variedad irreducible (en $\mathbf{C}^n$) como una variedad algebraica V tal que el producto de dos polinomios no pueda anularse sobre toda la variedad V más que si uno de ellos lo hace, y da una definición de dimensión independiente de los ejes elegidos. En las interesantes consideraciones históricas que incluye en este trabajo, Lasker indica que se considera continuador no solamente de la tendencia puramente algebraica de Kronecker y Dedekind, sino también de los problemas planteados por los métodos geométricos de la escuela de Clesch y M. Noether, haciendo referencia sobre todo al famoso teorema demostrado por este último en 1873 [*236*]. Se trata fundamentalmente, como diríamos hoy, de la determinación del ideal $\mathfrak{a}$ de los polinomios de $\mathbf{C}[X_1,$

su resultante de Sylvester, que es un polinomio en los u_i y v_i, y con coeficientes en $\mathbf{C}[X_2, \ldots, X_n]$ (resp. $\mathbf{Z}[X_2, \ldots, X_n]$), y anulando estos coeficientes se obtiene un sistema de ecuaciones cuyas soluciones $(x_2, \ldots, x_n)$ son justamente las proyecciones de las soluciones $(x_1, \ldots, x_n)$ del sistema de ecuaciones $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ $(1 \leq i \leq r)$, y puede, por tanto, aplicarse el método de inducción sobre n.

[21] Este número de coordenadas arbitrarias recibe el nombre de *dimensión* («Stufe»).

$\ldots, X_n]$ que se anulan en los puntos de un conjunto dado M de $\mathbf{C}^n$, siendo M casi siempre la «variedad algebraica» de los ceros comunes a un número finito de polinomios f_i, y parece que durante mucho tiempo se admitiese (sin justificación, desde luego) que, al menos para $n = 2$ o $n = 3$, el ideal $\mathfrak{a}$ era engendrado simplemente por los f_i[22]. M. Noether había mostrado que ya para $n = 2$ y para dos polinomios f_1, f_2, esto es en general falso, y había dado condiciones suficientes para que $\mathfrak{a}$ sea engendrado por f_1 y f_2. Diez años después, Netto prueba que, sin ninguna hipótesis sobre f_1 y f_2, una *potencia* de $\mathfrak{a}$ está siempre contenida en el ideal engendrado por f_1 y f_2 [*231*], teorema que generaliza Hilbert en 1893 en su célebre «teorema de los ceros» ([*163* a], t. II, pp. 287-344). Lasker, inspirado sin duda por este resultado, introduce en su memoria la noción general de ideal *primario*[23] en los anillos $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$ y $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ (después de haber dado para estos anillos la definición de ideal primo transcribiendo la definición de Dedekind), y demuestra[24] la existencia de una descomposición primaria para todo ideal de estos anillos[25].

[22] Véanse las observaciones de M. Noether al principio de su memoria [*239*]. Resulta interesante observar con este motivo que, según Lasker, Cayley habría conjeturado, hacia 1860, que para toda curva algebraica alabeada en $\mathbf{C}^3$ existiría un número finito de polinomios que engendraría el ideal de los polinomios de $\mathbf{C}[X, Y, Z]$ que se anulan sobre la curva (dicho de otro modo, se trataría de un caso particular del teorema de finitud de Hilbert ([*163* a], t. II, pp. 199-257)).

[23] Ejemplos de ideales primarios que no eran potencias de ideales primos habían sido encontrados por Dedekind en los «órdenes», es decir, en los anillos de números algebraicos que tienen como cuerpo de fracciones un cuerpo de números dado ([*79*], t. III, p. 306). Kronecker da también como ejemplo de ideal «no descomponible» en producto de otros dos no triviales el ideal de $\mathbf{Z}[X]$ engendrado por p^2 y $X^2 + p$, siendo p un número primo (ideal que es primario para el ideal primo engendrado por X y p ([*186* a], t. II, p. 341)).

[24] Lasker procede por inducción sobre la mayor dimensión h de las componentes irreducibles de la variedad V de los ceros del ideal considerado $\mathfrak{a}$. En términos modernos, empieza considerando los ideales primos $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leq i \leq r)$ que contienen a $\mathfrak{a}$, que corresponden a las componentes irreducibles de dimensión máxima h de V. A cada $\mathfrak{p}_i$ asocia el saturado $\mathfrak{q}_i$ de $\mathfrak{a}$ relativamente a $\mathfrak{p}_i$. A continuación considera el transportador $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{a} : \mathfrak{q}_i$ de $\mathfrak{q}_i$ en $\mathfrak{a}$, toma en $\Sigma\ \mathfrak{b}_i$ un elemento c que no pertenece a ninguno de los $\mathfrak{p}_i$, y demuestra por una parte que $\mathfrak{a}$ es intersección de los $\mathfrak{q}_i$ y de $\mathfrak{a} + (c) = \mathfrak{a}'$, y, por otra, que la variedad V' de los ceros de $\mathfrak{a}'$ tiene solamente componentes irreducibles de dimensión $\leq h - 1$, lo que le permite completar el razonamiento por inducción.

[25] Es interesante señalar que la segunda demostración de Dedekind del teorema de descomposición única empieza por establecer la existencia de una descomposición primaria reducida única, y en un pasaje no publicado en el suplemento XI, Dedekind

Lasker no parece haberse preocupado de las cuestiones de *unicidad* en esta descomposición, y fue Macaulay el que introdujo un poco después [*211*] la distinción entre ideales primarios «sumergidos» y «no sumergidos», demostrando que los segundos están determinados de forma única, pero no así los primeros. Hay que señalar por último que Lasker extiende también sus resultados al anillo de las *series enteras convergentes* en el entorno de un punto, basándose en el «teorema de preparación» de Weierstrass. Esta parte de su memoria es sin duda el primer lugar en el que este anillo ha sido considerado desde un punto de vista puramente algebraico, y los métodos que con este motivo desarrolla Lasker influirían poderosamente sobre Krull al crear éste en 1938 la teoría general de los anillos locales (cf. [*187* h], p. 204 y *passim*).

La corriente de ideas que culminará en el álgebra conmutativa moderna empieza a tomar forma hacia 1910. Si bien la noción general de cuerpo aparece a principios del siglo XX, hasta 1914 no aparece el primer trabajo en el que se encuentra la noción general de anillo, debido a Fraenkel [*113* a]. En esta época, se conocían ya como ejemplos de anillos no solamente los anillos enteros de la Teoría de números y de la Geometría algebraica, sino también los anillos de series (formales o convergentes) y por último las álgebras (conmutativas o no) sobre un cuerpo de base. Sin embargo, tanto en lo que refiere a la teoría de anillos como a la de cuerpos, el papel de catalizador parece haber sido desempeñado por la teoría de los *números p-ádicos* de Hensel, que tanto Fraenkel como Steinitz [*294* a] mencionan muy especialmente como punto de partida de sus trabajos.

La primera publicación de Hensel sobre este tema se remonta a 1897; en ella se parte de la analogía señalada por Dedekind y Weber entre los puntos de una superficie de Riemann de un cuerpo de funciones algebraicas K y los ideales primos de un cuerpo de números k, y se propone trasladar a la Teoría de números los «desarro-

señala explícitamente que esta parte de la demostración no solamente es válida para el anillo A de todos los enteros de un cuerpo de números K, sino también para todos los «órdenes» de K ([*79*], t. III, p. 303). Solamente después, una vez probado explícitamente que A es «completamente íntegramente cerrado» (salvo la terminología), demuestra, utilizando este hecho, que los ideales primarios de la descomposición anterior son en realidad potencias de ideales primos ([*79*], t. III, p. 307).

llos de Puiseux» (clásicos desde mediados del siglo XIX) que, en un entorno de un punto cualquiera de la superficie de Riemann de K, permiten expresar todo elemento $x \in K$ por medio de una serie convergente de potencias de la «uniformizante» en el punto considerado (series con número finito de términos con exponentes negativos). Hensel demostró también que si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de k sobre un número primo p, se puede asociar a todo $x \in k$ una «serie p-ádica» de la forma $\sum_i \alpha_i p^i$ (o $\sum_i \alpha_i p^{i/e}$ cuando $\mathfrak{p}$ está ramificado sobre p), perteneciendo las α_i a un sistema dado de representantes del cuerpo de restos del ideal $\mathfrak{p}$, pero su gran originalidad fue la idea de considerar tales «desarrollos» incluso cuando no correspondían a *ningún elemento* de k, por analogía con los desarrollos en serie entera de las funciones transcendentes sobre una superficie de Riemann [*157* a].

Durante todo el resto de su carrera, Hensel se dedicará a perfeccionar poco a poco su nuevo cálculo, y si bien su proceder puede parecernos dubitativo o torpe, no hay que olvidar que, al menos al principio, no disponía de ninguna de las herramientas topológicas o algebraicas de la matemática actual que habrían facilitado su labor. En sus primeras publicaciones, además, no habla mucho de nociones topológicas, y para él el anillo de los enteros $\mathfrak{p}$-ádicos ($\mathfrak{p}$ ideal primo del anillo A de los enteros de un cuerpo de números k) es, en resumen, en términos modernos, el límite proyectivo de los anillos $A/\mathfrak{p}^n$ para n creciendo indefinidamente, en el sentido puramente algebraico, y para establecer las propiedades de este anillo y de su cuerpo de fracciones se ve obligado a utilizar a cada paso, más o menos penosamente, razonamientos *ad hoc* (por ejemplo, para probar que los números $\mathfrak{p}$-ádicos forman un anillo entero). La idea de introducir en un cuerpo $\mathfrak{p}$-ádico nociones topológicas no aparece en Hensel antes de 1905 [*157* d], y es solamente en 1907, después de haber escrito el libro en el que reexpone de acuerdo con sus ideas la teoría de los números algebraicos [*157* f] cuando llega a la definición y a las propiedades fundamentales de los valores absolutos $\mathfrak{p}$-ádicos [*157* e], a partir de las que podrá desarrollar, calcado sobre la teoría de Cauchy, todo un «análisis $\mathfrak{p}$-ádico» que será capaz de aplicar provechosamente en la teoría de números (sobre todo con el empleo de la exponencial y del logaritmo $\mathfrak{p}$-ádicos), y cuya importancia no ha dejado de crecer desde entonces.

Hensel se había dado muy bien cuenta, desde el principio, de las simplificaciones que aportaba su teoría a las formas de exposición clásica, permitiendo «localizar» los problemas y situarse en un cuerpo en el que no solamente las propiedades de divisibilidad eran triviales, sino en el que también, gracias al lema fundamental obtenido en 1902 [*157* c], el estudio de los polinomios cuyo polinomio «reducido» mod. p no tiene raíces múltiples se reduce al estudio de los polinomios sobre un cuerpo finito. Hensel había dado ya en 1897 [*157* b] ejemplos importantes de estas simplificaciones, sobre todo en las cuestiones relativas al discriminante (en particular, una corta demostración del criterio dado por él mismo algunos años antes para la existencia de «divisores extraordinarios»). Pero parece que durante muchos años los números p-ádicos inspiraron una gran desconfianza a los matemáticos contemporáneos, actitud sin duda alguna normal ante ideas demasiado «abstractas», pero que el entusiasmo un poco excesivo de su autor (tan frecuente en matemáticas entre los defensores de teorías nuevas) no dejaba de justificar en parte. En efecto, no contento con aplicar provechosamente su teoría a los números algebraicos, Hensel, impresionado al igual que todos sus contemporáneos por las demostraciones de la trascendencia de e y π, y tal vez engañado por el calificativo «trascendente» atribuido simultáneamente a los números y a las funciones, había llegado a pensar que existía una relación entre los números p-ádicos y los números reales trascendentes, y por un momento creyó poder obtener de esta manera una demostración sencilla de la trascendencia de e, e incluso de la de e^e ([*157* d], p. 556)[26].

La situación cambia poco después de 1910 con la llegada de la generación siguiente, influenciada por las ideas de Fréchet y de F. Riesz sobre la topología, y por las de Steinitz sobre el álgebra, y, entregada desde el principio a la «abstracción», será esta generación la que hará comprensibles y dará su verdadero lugar a los

[26] Esta búsqueda a cualquier precio de un paralelismo estrecho entre series p-ádicas y series de Taylor lleva también a Hensel a plantearse extraños problemas: demuestra, por ejemplo que todo entero p-ádico puede escribirse en forma de serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$; donde los a_k son números racionales elegidos de tal modo que la serie converja no solamente en $\mathbf{Q}_p$, sino también *en* $\mathbf{R}$ (¿sin duda, acordándose de las series de Taylor que convergen en varios lugares a la vez?) [*157* e y f].

trabajos de Hensel. Kürschak [*190*], ya en 1913, define de modo general la noción de valor absoluto, se da cuenta de la importancia de los valores absolutos ultramétricos (de los que el valor absoluto p-ádico era un ejemplo), demuestra (calcando la demostración sobre el caso de los números reales) la existencia del completado de un cuerpo respecto a un valor absoluto, y sobre todo demuestra de forma general la posibilidad de la prolongación de un valor absoluto a una extensión algebraica cualquiera del cuerpo dado. Pero no se había dado cuenta de que el carácter ultramétrico de un valor absoluto se ponía ya de manifiesto en el cuerpo primo; este punto fue aclarado por Ostrowski, al que se debe también la determinación de todos los valores absolutos sobre el cuerpo **Q**, y el teorema fundamental que caracteriza los cuerpos dotados de un valor absoluto no ultramétrico como subcuerpos de **C** [*242*]. Durante los años que van de 1920 a 1935 la teoría será completada con un estudio más detallado de los valores absolutos no necesariamente discretos, comprendiendo entre otros el examen de las diversas circunstancias que tienen lugar al pasar a una extensión algebraica o trascendente (Ostrowski, During, F. K. Schmidt). Por otra parte, Krull introduce y estudia en 1931 la noción general de valoración [*187* f] que será ampliamente utilizada en los años siguientes por Zariski y su escuela de Geometría algebraica[27]. Tenemos que mencionar aquí también, aunque salga de nuestro marco, los estudios más profundos sobre la estructura de los cuerpos valorados completos y los anillos locales completos, que datan de la misma época (Hasse-Schmidt, Witt, Teichmüller, I. Cohen).

El trabajo de Fraenkel más arriba citado (p. 151) solamente se ocupaba de un tipo de anillo muy particular (los anillos artinianos no tienen más que un único ideal primo, que se supone además que es principal). Si dejamos aparte la obra de Steinitz sobre los cuerpos [*294* a] los primeros trabajos importantes en el estudio de los anillos conmutativos generales son las dos grandes memorias de E. Noether sobre la teoría de ideales: la de 1921 [*236* a], dedicada a la descomposición primaria, que recoge en el plano más general y completa numerosos resultados de Lasker y de Macaulay,

[27] Un ejemplo de valoración de altura 2 ya había sido introducido incidentalmente por H. Jung [*175*], en 1925.

y la de 1927, caracterizando axiomáticamente los anillos de Dedekind [*236* b]. Como ya había mostrado Steinitz con los cuerpos, vemos en estas memorias cómo un pequeño número de ideas abstractas, como la noción de ideal irreducible, las condiciones de cadena, y la idea de anillo íntegramente cerrado (las dos últimas, como hemos visto, ya señaladas por Dedekind) podían conducir por sí mismas a resultados generales que parecían indisolublemente ligados a resultados puramente calculísticos en los casos anteriormente conocidos.

Con estas memorias de E. Noether, unidas a los trabajos ligeramente posteriores de Artin-van der Waerden sobre los ideales divisoriales ([*317* a], t. II, pp. 105-109) y de Krull relacionando estos ideales con las valoraciones esenciales [*187* f], se completa el largo estudio de la descomposición de los ideales comenzado un siglo antes[28], al mismo tiempo que se inaugura el Algebra conmutativa moderna.

Los innumerables trabajos posteriores del álgebra conmutativa pueden agruparse de acuerdo con varias tendencias directrices fundamentales:

A) *Anillos locales y topologías.* Aunque ya contenida en potencia en todos los trabajos anteriores de la Teoría de números y de la Geometría algebraica, la idea general de localización tarda mucho tiempo en presentarse aislada. La noción general de anillo de fracciones no es definida hasta 1926 por H. Grell, un discípulo de E. Noether, y únicamente para los anillos enteros [*137*]; su extensión a los anillos más generales no será dada hasta 1944 por Chevalley para los anillos noetherianos y 1948 por Uzkov para el caso general. Hasta casi 1940, Krull y su escuela son prácticamente los únicos en utilizar en razonamientos generales la consideración de los anillos locales $A_{\mathfrak{p}}$ de un anillo entero A; estos anillos no empezarán a aparecer explícitamente en Geometría algebraica hasta los trabajos de Chevalley y Zariski a partir de 1940[29].

[28] Después de la definición de los ideales divisoriales se emprendieron numerosos trabajos (Prüfer, Krull, Lorenzen, etc.) sobre los ideales que son *estables* por otras operaciones $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}'$ verificando condiciones axiomáticas análogas a las propiedades de la operación $\mathfrak{a} \mapsto A : (A : \mathfrak{a})$ que origina los ideales divisoriales. Los resultados obtenidos en esta dirección no han encontrado aplicación hasta el momento ni en Geometría algebraica ni en Teoría de números.

[29] En los trabajos de Hensel y de sus discípulos sobre la Teoría de números, los

El estudio general de los mismos anillos locales no comienza hasta 1938 con la gran memoria de Krull [*187* h]. Los resultados más importantes de este trabajo se refieren a la teoría de la dimensión y a los anillos regulares, y no vamos a hablar de ellos aquí, pero también aparece por primera vez el completado de un anillo local noetheriano cualquiera, así como una forma todavía imperfecta del anillo graduado asociado a un anillo local[30]. Este último no será definido hasta 1948 por P. Samuel [*270*] y también, independientemente, en los trabajos de topología algebraica de Leray y H. Cartan. Krull, en el trabajo antes citado, no emplea demasiado el lenguaje topológico, pero ya en 1928 [*187* e] había demostrado que, en un anillo noetheriano A, la intersección de las potencias de un mismo ideal $\mathfrak{a}$ es el conjunto de los $x \in$ A tales que $x(1-a) = 0$ para un $a \in \mathfrak{a}$, se deduce fácilmente de aquí que para todo ideal $\mathfrak{m}$ de A, la topología $\mathfrak{m}$-ádica sobre A induce sobre un ideal $\mathfrak{a}$ de A la topología $\mathfrak{m}$-ádica de $\mathfrak{a}$; en su memoria de 1938 Krull completa este resultado demostrando que en un anillo local noetheriano todo ideal es cerrado. Estos teoremas fueron extendidos poco después por Chevalley a los anillos semilocales noetherianos, y más tarde por Zariski a los anillos que llevan su nombre [*340* b]; también se remonta a Chevalley la introducción de la «compacidad lineal» en los anillos topológicos, así como la determinación de la estructura de los anillos semilocales completos [*62* c].

B) *Paso de local a global.* Desde Weierstrass se ha tomado la costumbre de asociar una función analítica de una variable (y en particular una función algebraica) al conjunto de sus «desarrollos» en todos los puntos de la superficie de Riemann en los que está definida. En la introducción de su libro sobre la teoría de números

anillos locales $A_\mathfrak{p}$ son dejados de lado sistemáticamente, prefiriéndose considerar sus completados, a causa, sin duda, de la posibilidad de aplicar a estos últimos el lema de Hensel.

[30] Si $\mathfrak{m}$ es el ideal maximal del anillo local noetheriano considerado A, y $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq r}$ un sistema mínimo de generadores de $\mathfrak{m}$, Krull define para todo $x \neq 0$ de A las «formas iniciales» de x de la forma siguiente: si j es el mayor entero tal que $x \in \mathfrak{m}^j$, las formas iniciales de x son todos los polinomios homogéneos de grado j, $P(X_1, \ldots, X_r)$ con coeficientes en el cuerpo residual $k = A/\mathfrak{m}$, tales que $x \equiv P(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \pmod{\mathfrak{m}^{j+1}}$, y hace corresponder a todo ideal $\mathfrak{a}$ de A el ideal graduado de $k[X_1, \ldots, X_r]$ engendrado por las formas iniciales de todos los elementos de $\mathfrak{a}$ («Leitideal»), estas dos nociones hacen el papel del anillo graduado asociado.

([*157* f], p. V), Hensel asocia de la misma manera a todo elemento de un cuerpo k de números algebraicos el conjunto de los elementos que le corresponden en los *completados* de k para *todos* los valores absolutos[31] sobre k. Puede decirse que este punto de vista ha sustituido en el álgebra conmutativa moderna a la fórmula de descomposición de un ideal en producto de ideales primos (continuando en un cierto sentido el punto de vista inicial de Kummer). La observación de Hensel equivale implícitamente a sumergir k en el *producto* de todos sus completados, y esto es lo que hace explícitamente Chevalley en 1936 con su teoría de los «idelos» [*62* b], que perfecciona las ideas anteriores análogas de Prüfer y von Neumann (estos últimos se limitaban a sumergir k en el producto de sus completados $\mathfrak{p}$-ádicos)[32]. Aunque esto salga en cierta medida de nuestro cuadro, es importante mencionar aquí que, gracias a una topología adecuada sobre el grupo de los idelos, puede aplicarse a la teoría de números toda la técnica de los grupos localmente compactos (incluida la medida de Haar) de forma muy eficaz.

En un orden de ideas más general, el teorema de Krull [*187* f], caracterizando un anillo íntegramente cerrado como intersección de anillos de valoración (lo que equivale igualmente a sumergir el anillo considerado en un producto de anillos de valoración), facilita a menudo el estudio de estos anillos, aunque el método solo sea en realidad manejable para las valoraciones esenciales de los anillos de Krull. Se encuentran además frecuentemente en Krull [*187* i] ejemplos (bastante elementales) del método de «paso de local a global» consistente en demostrar una propiedad de un anillo entero A limitándose a verificarla para los «localizados» $A_\mathfrak{p}$ de A en todos sus ideales primos[33]. Serre, más recientemente, se dio cuenta

[31] Hensel toma como valores absolutos no ultramétricos sobre un cuerpo K de grado n sobre $\mathbf{Q}$ las funciones $x \mapsto |x^{(i)}|$ (donde las $x^{(i)}$ para $1 \leq i \leq n$ son los conjugados de x) utilizadas corrientemente desde Dirichlet. Ostrowski demostró, algo más tarde, que estas funciones son esencialmente los únicos valores absolutos no ultramétricos sobre K.

[32] Debido a esta observación de Hensel se ha extendido la costumbre de llamar (por abuso de lenguaje) «lugares en el infinito» de un cuerpo de números K a los valores absolutos no ultramétricos de K, por analogía con el proceso mediante el cual definen Dedekind y Weber los «puntos del infinito» de la superficie de Riemann de una curva afín (cf. p. 147).

[33] Cuando se habla de «paso de local a global» se alude a menudo a cuestiones

de que este método es válido para anillos conmutativos cualesquiera A, de que es aplicable también a los A-módulos y a sus homomorfismos, y que es incluso suficiente limitarse a «localizar» en los ideales maximales de A, punto de vista estrechamente relacionado con las ideas sobre los «espectros» y sobre los haces definidos sobre dichos espectros (véase más adelante, p. 161).

C) *Enteros y clausura íntegra*. Hemos visto cómo la noción de entero algebraico, introducida primeramente para los cuerpos de números, había sido ya extendida por Kronecker y Dedekind a los cuerpos de funciones algebraicas, aunque en este caso pudiera parecer bastante artificial (al no corresponder a una noción proyectiva). La memoria de E. Noether de 1927, y los trabajos posteriores de Krull a partir de 1931, pondrían de manifiesto el interés que presentaban estas nociones para los anillos más generales[34]. Se deben a Krull en particular los teoremas de «levantamiento» de los ideales primos en las álgebras enteras [*187* g], así como la extensión de la teoría de los grupos de descomposición y de inercia de Dedekind-Hilbert [*187* f]. En cuanto a E. Noether, se le debe la formulación general del lema de normalización[35] (de donde se obtiene entre otros el teorema de los ceros de Hilbert), así como el primer criterio general (transcripción de los razonamientos clásicos de Kronecker y Dedekind) permitiendo afirmar que la clausura íntegra de un anillo entero es *finita* sobre este anillo.

mucho más complicadas, ligadas a la teoría de los cuerpos de clases, y cuyos ejemplos más conocidos son los tratados en las memorias de Haase [*150* a y b] acerca de las formas cuadráticas sobre un cuerpo de números algebraicos k, en las que Haase demuestra, entre otras cosas, que la condición necesaria y suficiente para que una ecuación $f(x_1, \ldots, x_n) = a$ tenga una solución en k^n (f forma cuadrática, $a \in k$) es que tenga una solución en cada uno de los completados de k. Según indica el propio Haase, la idea de este tipo de teoremas le habría sido sugerida por su maestro Hensel [*150* c]. La extensión de este «principio de Haase» a otros grupos distintos del grupo ortogonal es uno de los objetivos de la moderna teoría de los «adelizados» de los grupos algebraicos.

34 Krull y E. Noether se limitan a los anillos enteros, pero no resulta difícil extender sus métodos al caso general. A este respecto, el trabajo más interesante es la memoria en que I. Cohen y Seidenberg extienden los teoremas de Krull indicando con toda precisión sus límites de validez [*66*]. Es conveniente mencionar que E. Noether había señalado explícitamente la posibilidad de tales generalizaciones en su memoria de 1927 ([*236* b], p. 30).

35 Un caso particular ya había sido enunciado por Hilbert en 1893 ([*163* a], t. II, p. 290).

Finalmente, hay que señalar aquí que una de las razones de la importancia moderna de la noción de anillo íntegramente cerrado se debe a los estudios de Zariski sobre las variedades algebraicas. En efecto, Zariski ha descubierto que las variedades «normales» (es decir, aquellas cuyos anillos locales son íntegramente cerrados) poseen propiedades particularmente agradables, sobre todo la de no presentar «singularidades de codimensión 1», y se observó pronto que para los «espacios analíticos» tenían lugar fenómenos análogos. De este modo la «normalización» (es decir, la operación que consiste en tomar las clausuras íntegras de los anillos locales de una variedad) se ha convertido en una poderosa herramienta dentro del arsenal de la Geometría algebraica moderna.

D) *El estudio de los módulos y la influencia del Algebra homológica*. Una de las características más destacadas de la obra de E. Noether y W. Krull en Algebra es la tendencia a la «linealización», continuando la dirección análoga señalada para la teoría de cuerpos por Dedekind y Steinitz; dicho con otras palabras, los ideales son considerados ante todo como *módulos*, y por tanto les son aplicables todas las construcciones del Algebra lineal (cociente, producto, y más recientemente producto tensorial y formación de módulos de homomorfismos), dando lugar en general a módulos que ya no son ideales. De este modo se puso rápidamente de manifiesto que en muchas cuestiones (se trate de anillos conmutativos o no) carece de interés limitarse al estudio de los ideales de un anillo A, y es por el contrario conveniente enunciar más generalmente los teoremas para A-módulos (sometidos eventualmente a ciertas condiciones de finitud).

La intervención del Algebra homológica no ha hecho otra cosa que reforzar la tendencia anterior, en tanto que esta rama del Algebra se ocupa esencialmente de cuestiones de naturaleza *lineal*. No vamos aquí a hacer su historia, pero es interesante señalar que algunas de las nociones fundamentales del Algebra homológica (como la de módulo proyectivo y la del funtor Tor) han nacido con motivo de un estudio a fondo del comportamiento de los módulos sobre un anillo de Dedekind respecto al producto tensorial, estudio emprendido por H. Cartan en 1948.

Recíprocamente, era previsible que las nuevas clases de módulos introducidas de forma natural por el Algebra homológica como

«anuladores universales» de los funtores Ext (módulos proyectivos e inyectivos) y de los funtores Tor (módulos planos) arrojarían nueva luz sobre el Algebra conmutativa. Han sido los módulos proyectivos, y más aún los módulos planos, los que se han revelado como más útiles; la importancia de estos últimos reside sobre todo en la observación, hecha primeramente por Serre [*283* b], de que la localización y la compleción introducen de modo natural módulos planos, «explicando» de este modo de forma mucho más satisfactoria las propiedades ya conocidas de estas dos operaciones, y haciendo mucho más cómoda su utilización. Conviene por otra parte señalar que las aplicaciones del Algebra homológica están lejos de terminarse aquí, y que desempeña un papel cada vez más fundamental en la Geometría algebraica.

E) *La noción de espectro.* La última (cronológicamente) de las nuevas nociones del Algebra homológica tiene una historia compleja. El teorema espectral de Hilbert introducía conjuntos ordenados de proyectores ortogonales de un espacio de Hilbert, formando un «álgebra de Boole» (o mejor aún un *retículo de Boole*)[36], en correspondencia biunívoca con un retículo de Boole de clases de partes medibles (para una medida conveniente) de **R**. Fueron sin duda sus trabajos anteriores sobre los operadores en los espacios de Hilbert los que, hacia 1935, llevaron a M. H. Stone a estudiar de forma general los retículos de Boole, y a buscar sobre todo «representaciones» de ellos por medio de las partes de un conjunto (o de clases de partes para una cierta relación de equivalencia). Observa que un retículo de Boole se convierte en un *anillo conmutativo* (de un tipo muy particular) cuando se define la multiplicación mediante $xy = \inf(x, y)$ y la adición por $x + y = \sup(\inf(x, y'), \inf(x', y))$. En el caso particular en que se parte del retículo de Boole $\mathfrak{P}(X)$ de todas las partes de un conjunto *finito* X, se ve inmediatamente que los elementos de X están en correspondencia biunívoca natural con los *ideales maximales* del anillo «booleano» correspondiente, y Stone obtiene precisamente su teorema general de representación

[36] Un *retículo de Boole* es un conjunto ordenado reticulado, con un elemento mínimo α y un elemento máximo ω, en el que cada una de las leyes sup e inf es *distributiva* respecto de la otra, y en donde, para cada $a \in E$ existe un $a' \in E$ único tal que $\inf(a, a') = \alpha$ y $\sup(a, a') = \omega$.

de un retículo de Boole considerando de la misma manera el conjunto de los ideales maximales del anillo correspondiente, y asociando a todo elemento del retículo de Boole el conjunto de los ideales maximales que lo contienen [*301* a].

Se conocía por otra parte como ejemplo clásico de retículo de Boole el conjunto de las partes abiertas y cerradas a la vez de un espacio topológico. En un segundo trabajo [*301* b], Stone demostró que de hecho *todo* retículo de Boole es isomorfo a un retículo de Boole de este tipo. Para esto era necesario, naturalmente, definir una *topología* sobre el conjunto de los ideales maximales de un anillo «booleano», para lo que basta sencillamente tomar como conjuntos cerrados, para cada ideal $\mathfrak{a}$, el conjunto de los ideales maximales que contienen a $\mathfrak{a}$.

No vamos a hablar aquí acerca de la influencia de estas ideas sobre el Análisis funcional, donde desempeñaron un papel importante en el nacimiento de la teoría de las álgebras normadas desarrollada por I. Gelfand y su escuela. Pero en 1945 observa Jacobson [*172* c] que el procedimiento de definición de una topología imaginado por Stone puede aplicarse de hecho a *todo* anillo A (conmutativo o no) con tal que se tome como conjunto de ideales no el conjunto de todos los ideales maximales, sino el conjunto de ideales «primitivos» biláteros (i.e. los ideales biláteros $\mathfrak{b}$ tales que $A/\mathfrak{b}$ sea un anillo primitivo); para un anillo conmutativo se vuelven a encontrar los ideales maximales. Zariski, por su parte, utiliza un método análogo en 1944 [*340* a] para definir una topología sobre el conjunto de *lugares* de un cuerpo de funciones algebraicas. Sin embargo, estas topologías no eran para la mayor parte de los algebristas más que simples curiosidades, debido al hecho de no ser en general separadas, y se experimentaba una repugnancia bastante comprensible a la hora de trabajar con estos extraños objetos. Esta desconfianza no desapareció hasta que A. Weil mostró en 1952 que toda variedad algebraica puede ser dotada de forma natural de una topología de este tipo, y que esta topología permite definir, en perfecta analogía con el caso de las variedades diferenciables o analíticas, la noción de *espacio fibrado* [*330* e]. Poco después, Serre tuvo la idea de extender a estas variedades así topologizadas la teoría de los *haces coherentes*, gracias a la cual la topología tiene en el caso de las variedades «abstractas» la misma utilidad que la

topología usual cuando el cuerpo de base es **C**, sobre todo en lo que se refiere a la aplicación de los métodos de la Topología algebraica [*283* a y b].

A partir de este momento resultaba natural el empleo de este lenguaje geométrico en toda el Algebra conmutativa. Se observó muy pronto que la consideración de los ideales maximales es en general insuficiente para la obtención de enunciados cómodos[37] y que la noción adecuada es la del conjunto de los ideales *primos* del anillo, topologizado de la misma manera. Con la introducción de la noción de espectro se dispone de un diccionario que permite expresar todo teorema de Algebra conmutativa en un lenguaje geométrico muy cercano al de la geometría algebraica de la época Weil-Zariski, lo que ha contribuido además a ampliar considerablemente el marco de esta última, de tal modo que el Algebra conmutativa, desde este punto de vista, no es más que su parte más elemental [*138*].

[37] El inconveniente de limitarse al «espectro maximal» proviene del hecho de que si $\varphi: A \to B$ es un homomorfismo de anillos y $\mathfrak{n}$ es un ideal maximal de B, $\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{n})$ no es necesariamente un ideal maximal de A, mientras que para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de B, $\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{p})$ es un ideal primo de A. Resulta por tanto imposible en general asociar de modo natural a φ una aplicación del conjunto de los ideales maximales de B en el conjunto de los ideales maximales de A.

ALGEBRA NO CONMUTATIVA

Hemos visto ya (p. 93) cómo las primeras álgebras no conmutativas hacen su aparición en 1843-44 en los trabajos de Hamilton [*145* a] y Grassmann ([*134*], t. I_2). Hamilton, al introducir los cuaterniones, posee ya una concepción muy clara de las álgebras cualesquiera de rango finito sobre el cuerpo de los números reales ([*145*a], Prefacio, p. 26-31)[1]. En el desarrollo de su teoría, tiene un poco más adelante la idea de considerar lo que él llama «bicuaterniones», es decir, el álgebra sobre el cuerpo de los números complejos dotada de la misma tabla de multiplicación que el cuerpo de los cuaterniones, y hace la observación de que esta extensión provoca la aparición de divisores de cero ([*145* a], p. 650). El punto de vista de Grassmann es algo diferente, y durante mucho tiempo su «álgebra exterior» estuvo bastante alejada de la teoría de las álgebras[2], pero, bajo

[1] El concepto de isomorfía de dos álgebras no es mencionado por Hamilton, pero ya en esta época los matemáticos de la escuela inglesa, sobre todo Cayley y de Morgan saben bien que un cambio de base no modifica sustancialmente al álgebra estudiada (ver por ejemplo el trabajo de Cayley sobre las álgebras de rango 2 ([*58*], t. I, pp. 128-130)).

[2] Tal vez debamos ver la razón de ello en el hecho de que aparte de la multiplicación «exterior», Grassmann introduce también entre los multivectores lo que él llama las multiplicaciones «regresiva» e «interior» (que hacen para él el papel de

un lenguaje todavía carente de precisión, no puede dejarse de reconocer la primera idea de un álgebra (de dimensión finita o no, sobre el cuerpo de los números reales) definida por un sistema de generadores y de relaciones ([*134*], t. II_1, pp. 199-217).

En los años 1850-60 aparecen nuevos ejemplos de álgebras de forma más o menos explícita: si bien Cayley, al desarrollar la teoría de las matrices ([*58*], t. II, pp. 475-496), todavía no considera las matrices cuadradas en tanto que elementos de un álgebra (punto de vista que solamente aparecerá claramente con los Peirce hacia 1870 [*248* c]), al menos hace notar en esta ocasión la existencia de un sistema de matrices de orden 2 verificando la tabla de multiplicación de los cuaterniones, observación que puede considerarse como el primer ejemplo de representación lineal de un álgebra [3]. Por otro lado, en la misma memoria en que define la noción abstracta de grupo finito, da de pasada la definición del álgebra de un grupo de dicho tipo, sin obtener ninguna consecuencia de esta definición ([*58*], t. II, p. 129).

No hay ningún progreso notable que señalar antes de 1870, pero en esta fecha dan comienzo los trabajos sobre la estructura general de las álgebras de dimensión finita (sobre el cuerpo real o complejo). B. Peirce da los primeros pasos en este sentido; introduce las nociones de elemento nilpotente, de elemento idempotente, demuestra que un álgebra (con o sin elemento unidad) uno al menos

todo lo que se relaciona con la dualidad). Es en todo caso bastante notable, que, todavía hacia 1900, en el artículo de Study-Cartan de la Enciclopedia ([*52* a], t. II, pp. 107-246), el álgebra exterior no esté situada entre las álgebras asociativas, sino que reciba un tratamiento aparte, y que no se haga observar que uno de los tipos de álgebras de grado 4 (el tipo VIII de la p. 180) no es otra cosa que el álgebra exterior sobre el espacio de dimensión 2.

[3] A decir verdad, Cayley no señala dicha existencia, no escribe explícitamente las matrices en cuestión, y no parece haber observado en este momento que algunas son necesariamente imaginarias (en toda esta memoria no se precisa nunca si las «cantidades» que intervienen en las matrices son reales o complejas; de todos modos aparece incidentalmente un número complejo en la p. 494). Podría pensarse que no habría que dar más que un paso para identificar los «bicuaterniones» de Hamilton con las matrices complejas de orden 2; de hecho, este resultado no será enunciado explícitamente hasta 1870 por los Peirce ([*247*], p. 132). La idea general de representación regular de un álgebra es introducida por C. S. Peirce hacia 1879 [*248* c], y ya había sido presentida por Laguerre en 1876. ([*192*], t. I, p. 235).

de cuyos elementos no es nilpotente posee un idempotente $\neq 0$, y escribe la célebre descomposición

$$x = exe + (xe - exe) + (ex - exe) + (x - xe - ex + exe)$$

(e idempotente, x elemento cualquiera), y tiene la idea, todavía un poco imprecisa, de una descomposición de un idempotente en suma de idempotentes «primitivos» ortogonales dos a dos [*247*]. Además, según Clifford ([*65*], p. 274) [4], se debe a B. Peirce la noción de producto tensorial de dos álgebras, que el mismo Clifford aplica implícitamente a una generalización de los «bicuaterniones» de Hamilton ([*65*], pp. 181-200), y explícitamente al estudio de las álgebras que llevan su nombre, algunos años después ([*65*], pp. 397-401 y 266-276). Estas nuevas nociones son empleadas por B. Peirce en la clasificación de las álgebras de dimensión pequeña (sobre el cuerpo de los números complejos), problema del que se preocupan también, hacia 1880, otros matemáticos de la escuela angloamericana, con Cayley y Sylvester a la cabeza. Se llega así rápidamente a la convicción del gran número de estructuras posibles, y es sin duda este hecho el que, en el periodo siguiente, va a orientar las investigaciones hacia la obtención de clases de álgebras con propiedades más particulares.

En el continente, donde la evolución de las ideas es bastante diferente, se empieza a trabajar en estos temas antes de 1880. En 1878, Frobenius demuestra que los cuaterniones constituyen el único ejemplo de cuerpo no conmutativo (de dimensión finita) sobre el cuerpo de los números reales ([*119*], t. I, pp. 343-405) resultado publicado independientemente dos años después por C. S. Peirce [*248* d]. Ya en 1861, Weierstrass, precisando una nota de Gauss, había caracterizado, en sus cursos, las álgebras conmutativas sin elemento nilpotente [5] sobre **R** o **C**, como compuestas directas de cuerpos

[4] B. Peirce encontró a Clifford en Londres en 1871, y ambos aluden varias veces a sus conversaciones, una de las cuales tuvo lugar sin duda en una sesión de la London Mathematical Society, en la que Peirce había presentado sus resultados.

[5] De hecho, Weierstrass impone a sus álgebras una condición más estricta, a saber, la de que la ecuación

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$$

(donde los a_i y la incógnita x están en el álgebra) no puede tener infinitas raíces más que si los a_i son todos múltiplos de un mismo divisor de 0.

(isomorfos a **R** o a **C**); por su parte Dedekind había llegado a las mismas conclusiones hacia 1870, en relación con su concepción «hipercompleja» de la teoría de los cuerpos conmutativos, sus demostraciones son publicadas hacia 1884-85 ([*329* a], t. II, pp. 311-332 y [*79*], t. II, pp. 1-19). Es también en 1884 cuando H. Poincaré, en una corta nota muy elíptica ([*251* a], t. V, pp. 77-79) llama la atención sobre la posibilidad de considerar que las ecuaciones $z_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, que expresan la ley multiplicativa $(\Sigma_i x_i e_i)(\Sigma_i y_i e_i) = \Sigma_i z_i e_i$ en un álgebra, definen (localmente) un grupo de Lie. Esta observación parece haber impresionado profundamente a Lie y sus discípulos (Study, Scheffers, F. Schur, y un poco después Molien y E. Cartan), que precisamente en esta época se preocupaban de desarrollar la teoría de los grupos «continuos», y sobre todo de los problemas de clasificación (ver en particular [*271*], p. 387); y en el periodo 1885-1905 llevó a los matemáticos de esta escuela a aplicar al estudio de la estructura de las álgebras métodos de la misma naturaleza que los empleados por ellos mismos en el estudio de los grupos y las álgebras de Lie. Estos métodos se apoyan fundamentalmente en la consideración del polinomio característico de un elemento del álgebra relativamente a su representación regular (polinomio que ya aparecía en los trabajos de Dedekind y Weierstrass arriba citados) y en la descomposición de este polinomio en factores irreducibles, descomposición en la que se refleja, como descubriría Frobenius un poco más tarde, la descomposición de la representación regular en componentes irreducibles.

A lo largo de los trabajos de la escuela de Lie sobre las álgebras van surgiendo poco a poco las nociones «intrínsecas» de la teoría. La noción de radical aparece en un caso particular (cuando el cociente por el radical es compuesto directo de cuerpos) en G. Scheffers en 1891 [*271*], y más claramente en Molien [*224* a] y Cartan ([*52* a], t. II_1, pp. 7-105), que estudian el caso general (la palabra «radical» se debe a Frobenius ([*119*], t. III, pp. 384-329)). Study y Scheffers [*271*] ponen en evidencia el concepto de álgebra compuesta directa de varias otras (ya entrevisto por B. Peirce ([*247*], p. 221)). Por último, Molien introduce [*224* a] las álgebras cocientes de un álgebra, noción esencialmente equivalente a la de ideal bilátero (definida por vez primera por Cartan ([*52* a], t. II_1, pp. 7-105)) o de homomorfismo (nombre también debido a Frobenius). Aquí la analogía con los

grupos es muy clara, y un poco más tarde, en 1904, Epsteen y Wedderburn considerarán series de composición de ideales biláteros, y extenderán a ellas el teorema de Jordan-Hölder. Los resultados más importantes de este periodo son los de T. Molien [*224* a]: guiado por la noción de grupo simple, define las álgebras simples (sobre **C**), y demuestra que se trata de álgebras de matrices, después prueba que la estructura de un álgebra cualquiera de rango finito sobre **C** se reduce esencialmente al caso (ya estudiado por Scheffers) en que el cociente por el radical es una suma directa de cuerpos. E. Cartan vuelve a encontrar estos resultados poco después ([*52* a], t. II_1, pp. 7-105), estableciéndolos de forma más clara y rigurosa, introduciendo la noción de álgebra semisimple, y destacando invariantes numéricos (los «enteros de Cartan») ligados a un álgebra cualquiera sobre el cuerpo **C** —llevando de este modo la teoría de las álgebras a un punto a partir del cual se ha progresado muy poco[6]; por último extiende los resultados de Molien y los suyos propios a las álgebras sobre **R**.

Alrededor de 1900 tiene lugar el movimiento de ideas que lleva a abandonar toda restricción sobre el cuerpo de escalares en todo lo referente al álgebra lineal; hay que señalar en particular el vigoroso impulso dado al estudio de los cuerpos finitos por la escuela americana, surgida alrededor de E. H. Moore y L. E. Dickson; el resultado más destacado de estos trabajos es el teorema de Wedderburn que demuestra que todo cuerpo finito es conmutativo [*328* a]. En 1907, Wedderburn recoge los resultados de Cartan, extendiéndolos a un cuerpo de base cualquiera [*328* b]; para lograr esto abandona por completo los métodos de sus antecesores (que dejan de ser aplicables cuando el cuerpo de base no es algebraicamente cerrado u ordenado maximal), y vuelve a emplear, perfeccionándola, la técnica de los idempotentes de B. Peirce, que le permite dar una forma definitiva al teorema de estructura de las álgebras semisimples, cuyo estudio reduce al de los cuerpos no conmutativos. Por otra parte, desde el punto de vista en el que se sitúa, el problema de la extensión del cuerpo de escalares se plantea de modo natural, y demuestra que toda álgebra semisimple continúa siéndolo después de una extensión

[6] Las dificultades esenciales provienen del estudio del radical, para la estructura del cual no se ha encontrado hasta ahora ningún principio satisfactorio de clasificación.

separable del cuerpo de base[7], y se convierte en una suma directa de álgebras centrales de matrices si la extensión tomada es suficientemente «grande» ([*328* b], p. 102)[8]. Un poco más tarde, Dickson, para $n = 3$ [*88* a] y el mismo Wedderburn para n cualquiera [*328* c] dan los primeros ejemplos de cuerpos no conmutativos de rango n^2 sobre su centro[9], inaugurando así con un caso particular la teoría de los «productos cruzados» y de los «sistemas de factores» que desarrollarán más tarde R. Brauer [*34* a] y E. Noether [*236* c]. Por último, en 1921, Wedderburn demuestra un caso particular del teorema de conmutación [*328* d].

Mientras tanto se había desarrollado, entre 1896 y 1910, por Frobenius, Burnside e I. Schur, una teoría próxima a la de las álgebras, la teoría de la representación lineal de grupos (limitada al principio a las representaciones de los grupos finitos). Su origen se remonta a algunas observaciones de Dedekind; éste había encontrado (antes incluso de la publicación de su trabajo sobre las álgebras), hacia 1880, a lo largo de sus trabajos sobre las bases normales de las extensiones de Galois, el «Gruppendeterminant» $\det(x_{st^{-1}})$, donde $(x_s)_{s \in G}$ es una sucesión de indeterminadas cuyo conjunto de índices es un grupo finito **G** (dicho de otro modo, la norma del elemento genérico del álgebra del grupo G relativamente a su representación regular), y había hecho la observación de que cuando G es abeliano, este polinomio se descompone en factores lineales (lo que generalizaba una identidad demostrada mucho antes para los determinantes «circulantes», que corresponden a los grupos G cíclicos). En su correspondencia, extraordinariamente interesante, con Frobenius ([*79*], t. II, pp. 414-442), Dedekind, en 1896, llama su atención sobre esta propiedad, su relación con la teoría de los caracteres de los grupos abelianos [*327* c] y algunos resultados análogos relativos a grupos no conmutativos particulares, que había obtenido en 1886. Algunos meses más tarde, Frobenius resolvía por completo el problema de la descomposición del «Gruppendeterminant» en factores irreducibles ([*119*], t. III, pp. 38-77), gracias a su brillante generalización de la noción de carácter ([*119*], t. III, pp. 1-37), de la que no vamos a hablar aquí. Pero es necesario señalar que a lo largo del desarrollo ulterior de esta teoría[10], Frobenius es siempre consciente de su parentesco con la teoría de las álgebras (sobre la que además no había dejado de insistir Dedekind en sus cartas), y después de haber introducido para los grupos las nociones de representación irreducible y de representación completamente reducible ([*119*], t. III, pp. 82-103), y demostrado que la representación regular contiene todas las representaciones irreducibles, proponía, en 1903, abordar la teoría de Molien-Cartan ([*119*], t. III, pp. 284-329), empleando métodos análogos. En Burnside [*44* a] e I. Schur [*279* c], el aspecto «hipercomplejo» de la teoría no interviene explícitamente, pero es en sus trabajos donde aparecen las propiedades fundamentales de las representaciones irreducibles, lema de Schur y teorema de Burnside. Por último, nos es necesario añadir para nuestro propósito que es en esta teoría donde aparecen por primera vez dos casos particulares del teorema de conmutación: en la tesis de I. Schur [*279* a] que relaciona (precisamente por medio de la conmutación en el anillo de los endomorfismos de un espacio tensorial) las representaciones del grupo lineal y las del grupo simétrico, y en su trabajo de 1905 [*279* c], en el que demuestra que las matrices permutables con todas las matrices de una representación irreducible sobre el cuerpo **C** son múltiplos escalares de I (resultado que también puede obtenerse a partir del teorema de Burnside).

[7] En el momento en que escribía Wedderburn, la noción de extensión separable todavía no había sido definida, pero utiliza implícitamente la hipótesis de que si un polinomio irreducible f sobre el cuerpo de base tiene una raíz x en una extensión de dicho cuerpo, se tiene necesariamente $f'(x) \neq 0$ ([*328* b], p. 103). Los fenómenos ligados a la inseparabilidad de la extensión del cuerpo de escalares no fueron señalados hasta 1929 por E. Noether [*236* c].

Mencionemos aquí otro resultado ligado a las cuestiones de separabilidad (y ahora relacionado con el álgebra homológica), la descomposición de un álgebra en suma directa (¡pero no en producto directo!) de su radical y de una subálgebra semisimple. Este resultado (que había sido demostrado por Molien cuando el cuerpo de escalares es **C** y por Cartan para las álgebras sobre **R**) es enunciado en su forma general por Wedderburn, que lo demuestra solamente cuando el cociente del álgebra por su radical es simple ([*328* b], pp. 105-109), empleando además con los polinomios irreducibles la misma hipótesis arriba citada.

[8] Los trabajos aritméticos sobre las representaciones lineales de grupos, que dan comienzo en la misma época, llevan también a considerar la noción equivalente de cuerpo neutralizante de una representación [*279* d].

[9] Observemos que en los «*Grunlagen der Geometrie*», Hilbert había dado un ejemplo de cuerpo no conmutativo de rango infinito sobre su centro ([*163* c], pp. 107-109).

[10] Una parte de los resultados de Frobenius había sido obtenida independientemente por T. Molien en 1897 [*224* b].

Todavía no se había delimitado claramente el substrato común a estas teorías, este fue el trabajo de la escuela alemana formada alrededor de E. Noether y E. Artin, en el periodo 1921-1933, que ve la creación del álgebra moderna. Ya en 1903, en una memoria acerca de la integración algebraica de las ecuaciones diferenciales lineales ([*251* a], t. III, pp. 140-149), H. Poincaré había definido, en un álgebra, los ideales por la izquierda y por la derecha y la noción de ideal minimal; había señalado también que en un álgebra semisimple, todo ideal por la izquierda es suma directa de sus intersecciones con las componentes simples, y que en el álgebra de matrices de orden n, los ideales minimales son de dimensión n; pero su trabajo pasó totalmente desapercibido de los algebristas [11]. En 1907, Wedderburn define de nuevo los ideales por la derecha y por la izquierda en un álgebra, y demuestra algunas de sus propiedades (principalmente que el radical es el mayor ideal por la izquierda nilpotente ([*328* b], pp. 113-114)). Pero hay que esperar hasta 1927 para que estas nociones sean empleadas de forma esencial en la teoría de las álgebras [12]. Expresando en forma general procedimientos de demostración que habían ido apareciendo anteriormente en un sitio y otro [13], W. Krull, en 1925 [*187* a], y E. Noether, en 1926 [*236* b], introducen y utilizan sistemáticamente las condiciones maximal y minimal; el primero, las emplea para extender a los grupos abelianos con operadores (que define con este motivo) el teorema de Remak sobre la descomposición de un grupo finito en producto directo de grupos no descomponibles mientras que la segunda hace intervenir estas condiciones en la caracterización de los anillos de Dedekind. En 1927, E. Artin [*7* c], aplicando la misma idea a los anillos no conmutativos, muestra cómo, mediante un estudio sistemático de los ideales minimales, se puede extender los teoremas de Wedderburn a todos los anillos cuyos ideales por la izquierda satisfacen simultáneamente las condiciones maximal y minimal [14].

[11] Notemos también que en esta memoria Poincaré observa que el conjunto de los operadores, en el álgebra de un grupo, que anulan un vector de un espacio de representación lineal del grupo, forman un ideal a la izquierda, y señala que esta observación podría aplicarse a la teoría de las representaciones lineales ([*251* a], t. III, p. 149), pero no desarrolló nunca esta idea.

[12] Es interesante observar que, en el intervalo, la noción de ideal por la derecha o por la izquierda aparece, no en el estudio de las álgebras, sino en un trabajo de E. Noether y W. Schmeidler [*238*] dedicado a los anillos de operadores diferenciales.

[13] La condición maximal (en la forma de «condición de cadena ascendente») se remonta a Dedekind, que la introduce explícitamente ([*79*], t. III, p. 90) en el estudio de los ideales de un cuerpo de números algebraicos; uno de los primeros ejemplos de razonamiento de «cadena descendente» es sin duda el que se encuentra en la memoria de Wedderburn de 1907 ([*328* b], p. 90) a propósito de los ideales biláteros.

Por otra parte, Krull, en 1926 [*187* b], establece la relación entre la noción de grupo abeliano con operadores y la de representación lineal de los grupos, punto de vista que E. Noether extiende a las álgebras y desarrolla detalladamente en un trabajo fundamental de 1929 [*236* c] que, por la importancia de las ideas introducidas y la lucidez de la exposición, merece figurar, al lado de la memoria de Steinitz sobre los cuerpos conmutativos, como uno de los pilares del álgebra lineal moderna [15].

Finalmente, en una serie de trabajos que comienzan en 1927 ([*237*], [*34* a], [*236* d]), E. Noether y R. Brauer (a los que a partir de 1929-31 se unen A. Albert y H. Hasse) continúan el estudio de los cuerpos no conmutativos a partir del punto a que habían llegado Wedderburn y Dickson. Si bien la parte más importante de sus resultados consiste en un estudio profundo del grupo de Brauer (en particular sobre los cuerpos de números algebraicos) y se sale por tanto de los límites de esta nota, debemos en todo caso señalar que es a lo largo de estos trabajos cuando se precisan los teoremas de conmutación, así como la noción de cuerpo neutralizante de un álgebra simple y sus relaciones con los subcuerpos conmutativos maximales; por último, en 1927, Skolem caracteriza los automorfismos de los anillos

[14] En 1929, E. Noether demostraba que para los anillos sin radical, estos teoremas se aplican suponiendo que se verifica únicamente la condición minimal ([*236* c], p. 663); C. Hopkins demostró en 1939 que esta condición sola implica que el radical sea nilpotente [*167*].

[15] Aquí se encuentran por primera vez, entre otras, en su forma general, las nociones de homomorfismo de grupos con operadores, de anillo opuesto, de bimódulo, así como los famosos «teoremas de isomorfía» (que para los grupos conmutativos figuran ya en [*236* b]). Desde luego que casos particulares o corolarios de estos últimos habían surgido mucho tiempo antes, por ejemplo (para el segundo teorema de isomorfía) en Hölder, a propósito de los grupos finitos [*165*], en Dedekind a propósito de los grupos abelianos ([*79*], t. III, pp. 76-77), en Wedderburn a propósito de los ideales biláteros ([*328* b], pp. 82-83); en lo que se refiere al primer teorema de isomorfía, es enunciado explícitamente por de Séguier en 1904 ([*86*], p. 65), por ejemplo.

simples [*286* b], teorema que es encontrado independientemente algunos años después por E. Noether [*236* c] y R. Brauer [*34* a].

De este modo, la teoría elemental de los anillos simples y semisimples llega más o menos, en 1934, a una formulación definitiva (para una exposición de conjunto del estado de la teoría en esta época, ver [*87*]). A partir de entonces se ha desarrollado en dos direcciones diferentes, que nos limitaremos a mencionar brevemente. Por un lado, la teoría de los «sistemas de factores», de R. Brauer y E. Noether, ha recibido recientemente un nuevo impulso como consecuencia de su incorporación dentro del Algebra homológica moderna[16]. Por el otro, se ha intentado muchas veces, con más o menos éxito, extender —en parte, al menos— los resultados de la teoría clásica a los anillos que no cumplen la condición minimal[17] o a los anillos sin unidad. Pero hasta ahora estas extensiones no han tenido muchas repercusiones sobre otras ramas de las matemáticas; para más detalles sobre estos trabajos remitimos a la reciente exposición de N. Jacobson [*172* b].

[16] No vamos a hacer aquí la historia de esta teoría y de sus relaciones con la noción de extensión de un grupo por otro, pero es conveniente notar que los primeros «sistemas de factores» hacen precisamente su aparición a propósito de un problema de extensión de grupos, en la memoria de 1904 en la que I. Schur funda la teoría de las «representaciones proyectivas» de los grupos [*279* b].

[17] Ya en 1928 había extendido Krull a módulos semisimples cualesquiera los teoremas generales sobre los módulos simples de longitud finita ([*187* c], pp. 63-66).

FORMAS CUADRATICAS. GEOMETRIA ELEMENTAL

La teoría de las formas cuadráticas, en su aspecto moderno, no se remonta más allá de la segunda mitad del siglo XVIII, y, como veremos, se ha desarrollado fundamentalmente para satisfacer las necesidades de la Aritmética, del Análisis y de la Mecánica. Pero las nociones fundamentales de esta teoría hacen realmente su aparición desde los comienzos de la geometría «euclídea», cuyo andamiaje constituyen. Por dicha razón no podemos hacer su historia sin hablar, aunque sea de forma resumida, del desarrollo de la «geometría elemental» desde la antigüedad. Como es natural, solamente podremos ocuparnos de la evolución de algunas ideas generales, y el lector no debe esperar encontrar aquí información detallada sobre la historia de tal o cual teorema particular, contentándonos con remitir a las obras históricas o didácticas especializadas[1]. Queremos también señalar que, cuando más adelante hablamos de las distintas interpretaciones posibles de un teorema en diversos lenguajes algebraicos o geométricos, no pretendemos en modo alguno sugerir que dichas «interpretaciones» hayan sido siempre tan familiares como puedan serlo hoy; por el contrario, la finalidad principal de esta Nota es la de hacer ver cómo, muy poco a poco, los matemáticos ha ido toman-

[1] Véase ([*311*], t. IV a VI) así como [*185*] y ([*106*], t. III).

do conciencia acerca de los parentescos entre cuestiones de aspecto algunas veces muy diferente; igualmente intentaremos mostrar cómo al realizar esta tarea han sido llevados a dotar de una cierta coherencia la masa de teoremas recibidos de los antiguos, y, por último, a intentar delimitar con toda precisión que es lo que debe entenderse por «geometría».

Si dejamos aparte el descubrimiento por los babilonios de la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado ([*232*], pp. 183-189), debemos observar que las principales nociones de la teoría de las formas cuadráticas nacen cubiertas de un ropaje geométrico, bajo el que deben reconocerse. Estas nociones aparecen primeramente como cuadrados de distancias (en el plano o en el espacio de tres dimensiones) y la noción de «ortogonalidad» correspondiente es introducida por medio del ángulo recto, definido por Euclides como la mitad del ángulo llano (*Elementos*, Libro I, Def. 10); estando las nociones de distancia y de ángulo recto ligadas por el teorema de Pitágoras, verdadera base del edificio de Euclides[2]. La idea de ángulo parece haberse introducido muy pronto en la matemática griega (procedente, sin duda, de los babilonios, muy diestros en el empleo de los ángulos a causa de su larga experiencia astronómica). Sabemos que en la época clásica solamente se definen los ángulos inferiores a dos rectos (además, la «definición» de Euclides es tan confusa e inutilizable como las que da de recta o plano); la noción de orientación no aparece, aunque Euclides haga uso (sin axioma ni definición previos) del hecho de que una recta divide el plano en dos regiones, que distingue cuidadosamente cuando es necesario[3]. En esta etapa, la idea del grupo de rotaciones planas no

[2] La mayor parte de las civilizaciones antiguas (Egipto, Babilonia, India, China) parecen haber llegado independientemente a enunciados que comprendían al menos algunos casos particulares del «teorema de Pitágoras», e incluso los indios tuvieron la idea de algunos principios de demostración de este teorema totalmente distintos de los que se encuentra en Euclides (que da de él dos demostraciones, una mediante la construcción de figuras auxiliares, y otra empleando la teoría de las proporciones) (cf. [*311*], t. IV, pp. 135-144).

[3] La noción de ángulo orientado, con sus diversas variantes (ángulo de rectas, ángulo de semirrectas) solo aparece muy tardíamente. Euler ([*108* a] (I), t. IX, pp. 217-239 y 305-307) introduce las coordenadas polares en geometría analítica, y también la concepción moderna de un ángulo (medido en radianes) tomando valores arbitrarios (positivos o negativos). L. Carnot [*51*] inaugura la tendencia que opondrá a lo largo de todo el siglo XIX, la geometría «sintética» a la geometría analítica; intentando desarrollar la primera con toda la independencia posible, se ve llevado, para evitar los «casos de figura» de los geómetras antiguos, a introducir sistemáticamente las magnitudes orientadas, longitudes y ángulos. Desgraciadamente, su obra se complica considerablemente debido a su postura de no emplear números negativos (¡que creía contradictorios!) y de remplazarlos por un sistema poco manejable de «correspondencia de signos» entre distintas figuras. Habrá que esperar hasta Möbius ([*223*], t. II, pp. 1-54) para que se introduzca el concepto de ángulo orientado en los razonamientos de la geometría sintética; sin embargo, al igual que sus sucesores hasta una época muy reciente, solo sabe introducir la orientación mediante un recurso directo a la intuición espacial (la regla llamada del «hombre de Ampère»), y hasta que no se desarrollan la geometría n-dimensional y la topología algebraica no se llega por fin a una definición rigurosa de «espacio orientado».

aparece más que de una manera muy imperfecta, por medio de la adición (introducida también sin explicación por Euclides) de los ángulos no orientados de semirrectas, que solamente está definida, en principio, cuando la suma es igual como máximo a dos rectos[4]. En lo que se refiere a la trigonometría, es despreciada por los geómetras y es abandonada a los agrimensores y a los astrónomos; son estos últimos (Aristarco, Hiparco, y sobre todo Ptolomeo [*255*]) los que establecen las relaciones fundamentales entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo (plano o esférico) y hacen las primeras tablas (se trata de tablas que proporcionan la *cuerda* del arco correspondiente a un ángulo $\theta < \pi$ en un círculo de radio r, es decir, el número $2r \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$; la introducción del seno, de manejo mucho más cómodo, se debe a los matemáticos indios de la Edad Media). En el cálculo de estas tablas, la fórmula de adición de arcos, desconocida en esta época, es sustituida por el empleo equivalente del teorema de Ptolomeo (que se remonta quizá a Hiparco) relativo a los cuadriláteros inscritos en un círculo. Hay que señalar también

[4] Se encuentran sin embargo en Euclides al menos dos pasajes en los que habla de ángulos cuya «suma» puede exceder de dos rectos, a saber, las desigualdades satisfechas por las caras de un triedro (*Elementos*, Libro XI, prop. 20 y 21) (sin hablar del «razonamiento» referente a la «medida» de los ángulos, que es sin duda una interpolación (cf. pp. 223-224)); en estos dos pasajes Euclides parece haberse dejado llevar por la intuición más allá de lo que le permitían sus propias definiciones. Sus sucesores son todavía mucho menos escrupulosos y, por ejemplo, Proclo (siglo V d. C.) no duda en enunciar un «teorema» general dando la suma de los ángulos de un polígono convexo ([*153* e], t. I, p. 322).

que Euclides y Herón enuncian proposiciones equivalentes a la fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

entre los lados y los ángulos de un triángulo plano cualquiera, pero, careciendo de la idea de un cálculo vectorial que no surgirá hasta el siglo XIX, no podemos ver en ellas una primera aparición de la noción de forma bilineal asociada a una forma métrica.

Los desplazamientos (o movimientos, ya que la distinción entre estas dos nociones no está clara en la antigüedad, ni siquiera mucho después) son conocidos por Euclides, pero, por razones que ignoramos, parece sentir cierta repugnancia en hacer uso de ellos (por ejemplo en los casos de «igualdad de triángulos», donde se tiene la impresión de que si emplea la noción de desplazamiento es por no haber sabido formular un axioma apropiado ([*153* e], t. I, pp. 225-227 y 249)); sin embargo, recurre a la noción de desplazamiento (rotación alrededor de un eje) para definir los conos de revolución y las esferas (*Elementos*, Libro XI, def. 14 y 18), y lo mismo hace Arquímedes para definir las cuádricas de revolución. Pero la idea general de transformación, aplicada a todo el espacio, no surge en el pensamiento matemático antes de los últimos años del siglo XVIII [5] y tampoco encontramos la menor huella de la noción de composición de movimientos (ni, con mucha más razón, de desplazamientos) antes del siglo XVII. Desde luego, esto no quiere decir que los griegos no fuesen particularmente sensibles a las «regularidades» y «simetrías» de las figuras, que nosotros relacionamos ahora con la noción del grupo de los desplazamientos; su teoría de los polígonos regulares,

[5] Solamente pueden citarse como ejemplo de tal noción las «proyecciones» de los cartógrafos y de los dibujantes; la proyección estereográfica era conocida por Tolomeo (y en el siglo XVI se sabe que conserva los ángulos), y la proyección central tiene un papel de primera importancia en la obra de Desargues [*84*], pero aquí se trata de la correspondencia entre todo el espacio (o una superficie) y un plano. Una de las propiedades de la inversión, que hoy expresamos diciendo que la transformada de un círculo es un círculo o una recta, era conocida en sustancia por Viète, y empleada por él en los problemas de construcción de círculos; pero ni él ni Fermat, que extiende sus construcciones a las esferas, tienen la idea de introducir la inversión como una transformación del plano o del espacio.

y más todavía la de los poliedros regulares —una de las más notables de toda la matemática griega— demuestra justamente lo contrario [6].

Finalmente, la última de las contribuciones esenciales de la matemática griega en el dominio a que nos estamos refiriendo, es la teoría de las cónicas (en cuanto a las cuádricas, los griegos solamente conocían algunas cuádricas de revolución, y no se preocuparon mucho de su estudio, con la excepción de la esfera). Es interesante señalar aquí que aunque los griegos (que carecían de un álgebra manejable) no hayan tenido nunca ninguna idea acerca del principio de la Geometría analítica, utilizaban corrientemente, para el estudio de ciertas «figuras» particulares, las «ordenadas» respecto a dos (o incluso más) ejes en el plano, estando dichos ejes estrechamente relacionados con la figura considerada, punto fundamental en el que su método difiere del de Fermat y Descartes, cuyos ejes se fijan independientemente de la figura. En particular, los primeros ejemplos de cónicas (distintas de la circunferencia) que se introducen a propósito del problema de la duplicación del cubo, son las curvas de ecuaciones $y^2 = ax$, $y = bx^2$, $xy = c$ (Menecmo, discípulo de Eudoxio, a mediados del siglo IV) [7]; la ecuación de las cónicas que se emplea más frecuentemente en el estudio de los problemas relativos a estas curvas es la relativa a dos ejes oblicuos formados por un diámetro y la tangente en uno de sus puntos de contacto con la curva, mientras que las propiedades «focales» tienen una importancia muy secundaria, contrariamente a lo que parecen indicar algunas tradiciones escolares que no se remontan más allá del siglo XIX. De toda esta vasta teoría, nos quedaremos aquí sobre todo con la noción de diámetros conjugados (ya conocida por Arquímedes), y la propiedad que sirve hoy de definición de polar de un punto, dada por Apolonio [*153* b] cuando el punto es exterior a la cónica (para él la polar es la recta que une los puntos de contacto de las tangentes que pasan por dicho punto); desde nuestro punto de vista se trata de dos ejemplos de «ortogonalidad» respecto a una forma cuadrática distinta

[6] Véase [*291*], donde se encontrarán también interesantes observaciones sobre las relaciones entre la teoría de los grupos de desplazamientos y los distintos tipos de ornamentación imaginados por las civilizaciones de la Antigüedad y la Edad Media.

[7] Parece que la idea de considerar estas curvas como secciones planas de conos con base circular (debida también a Menecmo) es *posterior* a su definición por medio de las ecuaciones anteriores (cf. [*153* b], pp. XVII-XXX).

de la forma métrica, pero no hay que decir que la relación entre estas nociones y la noción clásica de perpendicularidad era totalmente imposible de concebir en esta época.

Hasta llegar a Descartes y Fermat no hay muchos progresos que señalar, pero a partir de los comienzos de la Geometría analítica, la teoría algebraica de las formas cuadráticas empieza a librarse de su ganga geométrica. Fermat sabe que una ecuación de segundo grado en el plano representa una cónica ([*109*], t. I, pp. 100-102; trad. francesa, t. III, pp. 84-101) y apunta ideas análogas para las cuádricas ([*109*], t. I, pp. 111-117; trad. francesa, t. III, pp. 102-108). Con el desarrollo de la Geometría analítica para dos y tres dimensiones durante el siglo XVIII aparecen, a propósito sobre todo de las cónicas y de las cuádricas, dos de los problemas centrales de la teoría: la reducción de una forma cuadrática a una suma de cuadrados, y el cálculo de sus «ejes» respecto a la forma métrica. Para las cónicas, estos problemas son lo bastante sencillos como para no dar lugar a importantes progresos algebraicos; para un número cualquiera de variables, el primero es resuelto por Lagrange en 1759, a propósito de los máximos de las funciones de varias variables ([*191*], t. I, pp. 3-20). Pero este problema es eclipsado casi inmediatamente por el del cálculo de los ejes, antes incluso de haberse formulado la invariancia del rango[8]; la ley de inercia no es descubierta hasta cerca de 1850 por Jacobi ([*171*], t. III, pp. 593-598), que la demuestra por el mismo razonamiento que hoy día, y Sylvester ([*304*], t. I, pp. 378-381) que se limita a enunciarla como algo casi evidente[9].

El problema de la reducción de una cuádrica a sus ejes presenta ya dificultades algebraicas sensiblemente mayores que el problema análogo para las cónicas, y Euler, que es el primero en abordarlo,

[8] Al tratar un problema independiente por su naturaleza de la elección de los ejes de coordenadas, Lagrange no podía dejar de observar que su proceder tenía mucho de arbitrario, pero carecía todavía de las nociones que le permitiesen precisar esta idea: «*Por lo demás* —dice— *para no engañarse en estas investigaciones, hay que señalar que las transformadas* [en suma de cuadrados] *podrían muy bien ser diferentes de las que hemos dado; pero examinando el asunto más de cerca se encontrará infaliblemente que, sean las que sean, siempre podrán reducirse a éstas, o al menos estar comprendidas en ellas* [?]» (*loc. cit.*, p. 8).

[9] Por su parte, Gauss había llegado a este resultado, y lo demostraba en sus cursos siguiendo el método de los mínimos cuadrados, según el testimonio de Riemann, que siguió estos cursos en 1846-47 ([*259* b], p. 59).

no estaba en condiciones de demostrar que los valores propios eran reales, cosa que admite después de un intento de justificación sin ningún valor demostrativo ([*108* a] (1), t. IX, pp. 379-392)[10]. Si bien este punto queda establecido correctamente alrededor de 1800 [*140*], hay que esperar hasta Cauchy para la demostración del teorema correspondiente para formas con un número cualquiera n de variables ([*56* a] (2), t. IX, pp. 174-195). Es también Cauchy el que, hacia la misma época, demuestra que la ecuación característica que proporciona los valores propios es invariante para todo cambio de ejes rectangulares ([*56* a], (2), t. V, p. 252)[11], pero para $n = 2$ ó $n = 3$ esta invariancia es intuitivamente «evidente» debido a la interpretación de los valores propios por medio de los ejes de la cónica o cuádrica correspondiente. Además, en los trabajos sobre estas cuestiones se habían presentado de manera natural las funciones simétricas elementales de los valores propios (con distintas interpretaciones geométricas, relacionadas principalmente con los teoremas de Apolonio sobre los diámetros conjugados), y, sobre todo, el discriminante (ya conocido desde mucho antes para $n = 2$ en relación con la teoría de la ecuación de segundo grado), que aparece por primera vez para $n = 3$ en Euler ([*108* a] (1), t. IX, p. 382). Este último, lo encuentra a propósito de la clasificación de las cuádricas (al expresar la condición para que una cuádrica no tenga punto del infinito) y no menciona su invariancia respecto a los cambios de ejes rectangulares. Pero un poco después, en los principios de la teoría aritmética de las formas cuadráticas con coeficientes enteros, Lagrange señala, para $n = 2$, un caso particular de invariancia del discriminante por un cambio de variables lineal pero no ortogonal ([*191*], t. III, p. 699), y Gauss establece, para $n = 3$, la «covariancia» del discriminante para toda

[10] En la determinación de los ejes principales de inercia de un sólido está mucho más afortunado; habiendo reducido el problema a una ecuación de tercer grado, observa que una ecuación de este tipo tiene siempre una raíz real, y por tanto, que existe al menos un eje de inercia, y tomando este eje como eje de coordenadas, se reduce inmediatamente al problema plano, de fácil solución ([*108* a] (2), t. III, pp. 200-202).

[11] Hay que señalar que hasta más o menos 1930, solo se entiende por «forma cuadrática» un polinomio homogéneo de segundo grado con respecto a las coordenadas tomadas relativamente a un sistema de ejes dado. Parece que fue la teoría del espacio de Hilbert la que llevó a una concepción «intrínseca» de las formas cuadráticas, incluso en los espacios de dimensión finita.

transformación lineal ([*124* a], t. I, pp. 301-302) [12]. Una vez demostrada por Cauchy y Binet la fórmula general de la multiplicación de determinantes, la extensión de la fórmula de Gauss a un número cualquiera de variables era inmediata; dicha fórmula es la que, hacia 1845, dará el primer impulso a la teoría general de invariantes.

A las dos nociones de la teoría de los desplazamientos que aparecen en los griegos —la de movimiento y la de «simetría» de una figura— viene a sumarse una tercera en los siglos XVII y XVIII con el problema de los cambios de ejes rectangulares, que es sustancialmente equivalente a esta teoría. Euler consagra varios trabajos a este tema, preocupándose sobre todo de obtener representaciones paramétricas manejables para las fórmulas del cambio de ejes. Ya conocemos el uso que había de hacerse en Mecánica de los tres ángulos que introduce con este motivo para $n = 3$ ([*108* a] (1), t. IX, pp. 371-378). Pero no se limita a esto, y en 1770 vislumbra el problema general de las transformaciones ortogonales para n cualquiera, señala que para cumplir su objetivo basta introducir $n(n - 1)/2$ ángulos como parámetros, y finalmente, para $n = 3$ y $n = 4$, da representaciones *racionales* de las rotaciones (en función, respectivamente, de 4 parámetros homogéneos y de 8 parámetros homogéneos ligados por una relación), que no son otra cosa que las representaciones que se obtendrán más tarde mediante la teoría de los cuaterniones, y de las que no indica el origen ([*108* a] (1), t. VI, pp. 287-315) [13].

Por otra parte, Euler indica también la forma de «traducir» analíticamente la búsqueda de las simetrías de las figuras planas, y es entonces cuando se ve llevado a demostrar, en sustancia, que un desplazamiento plano es una rotación, o una traslación, o una traslación seguida de una simetría ([*108* a] (1), t. IX, pp. 197-199). La importancia de la Mecánica en esta época lleva también al estudio

[12] Es también dentro de estos trabajos cuando Gauss define la inversa de una forma cuadrática ([*124* a], t. I, p. 301) y obtiene la condición de positividad de una forma de este tipo mediante una sucesión de menores principales del discriminante (*ibid.*, pp. 305-307).

[13] Además, Euler no da la fórmula de la composición de rotaciones expresada por medio de estos parámetros; para $n = 3$ no la encontramos hasta una nota de Gauss (no publicada durante su vida ([*124* a], t. VIII, pp. 357-362)) y un trabajo de Olinde Rodrigues de 1840, que vuelve a encontrar la representación paramétrica de Euler, más o menos olvidada en esta época.

general de los desplazamientos, pero al principio solamente se consideran los desplazamientos «infinitamente pequeños» tangentes a los movimientos continuos: aparentemente éstos son los únicos que intervienen en los trabajos de Torricelli, Roberval, y Descartes sobre la composición de movimientos y el centro instantáneo de rotación para los movimientos planos (cf. pp. 241-242). Este último es definido de modo general por Juan Bernouilli; d'Alembert, en 1749, y Euler al año siguiente, extienden esta noción demostrando la existencia de un eje instantáneo de rotación para los movimientos que dejan un punto fijo. El teorema análogo para los desplazamientos finitos no es enunciado hasta 1775 por Euler [*108* b], en una memoria en la que también descubre que el determinante de una rotación es igual a 1; al año siguiente demuestra la existencia de un punto fijo para las semejanzas planas ([*108* a] (1), t. XXVI, pp. 276-285). Pero habrá que esperar hasta los trabajos de Chasles, posteriores a 1830 [*60* a], para poder disponer de una teoría coherente de los desplazamientos finitos e infinitamente pequeños.

De este modo, llegamos a lo que puede llamarse la edad de oro de la geometría, que puede considerarse *grosso modo* comprendida entre las fechas de publicación de la *Géométrie descriptive* (Geometría descriptiva) de Monge (1795) [*225*] y del «programa de Erlangen» de F. Klein (1872) ([*182*], t. I, pp. 460-497). Los progresos fundamentales que debemos a esta repentina renovación de la geometría son los siguientes:

A) La noción de elemento del infinito (punto, recta o plano), introducida por Desargues en el siglo XVII [*84*], pero que solo aparece en el siglo XVIII como un abuso de lenguaje, es rehabilitada y empleada sistemáticamente por Poncelet [*252*] que convierte de este modo el espacio proyectivo en el marco general de todos los fenómenos geométricos.

B) Al mismo tiempo se lleva a cabo, por medio de Monge, y sobre todo de Poncelet, el paso a la Geometría proyectiva *compleja*. La noción de punto imaginario, que se había utilizado esporádicamente a lo largo del siglo XVIII, es explotada aquí (junto con la de punto del infinito) para obtener enunciados independientes de los «casos de figura» de la geometría afín real. Si bien las primeras justificaciones alegadas en apoyo de estas innovaciones son un tanto torpes (por

parte, sobre todo, de los partidarios de la escuela de geometría «sintética», donde el empleo de coordenadas llega a ser considerado como una deshonra), no podemos por menos de dejar de reconocer, bajo el nombre de «principio de las relaciones contingentes», en Monge, o del «principio de continuidad», de Poncelet, la primera aparición de la idea de «especialización» de la geometría algebraica moderna [14].

Uno de los primeros resultados consecuencia de estas concepciones es la observación de que, en el espacio proyectivo complejo, todas las cónicas (resp. cuádricas) no degeneradas son de la misma naturaleza, lo que lleva a Poncelet al descubrimiento de los elementos «isótropos»: «*Varios círculos situados arbitrariamente en un plano*» —dice— «*no son totalmente independientes entre sí, como se podría creer de momento, sino que tienen idealmente dos puntos imaginarios comunes en el infinito*» ([*252*], t. I, p. 48). Más adelante introduce, incluso, la «umbilical», cónica imaginaria en el infinito común a todas las esferas ([*252*], t. I, p. 370); y si bien no menciona particularmente las generatrices isótropas de la esfera, al menos señala explícitamente la existencia de generatrices rectilíneas, reales o imaginarias, para todas las cuádricas (*ibid.* p. 371) [15], nociones de las que sus continuadores (sobre todo Plücker y Chasles), harán todavía más uso que él, en particular en el estudio de las propiedades «focales» de las cónicas y las cuádricas.

C) Las nociones de *transformación puntual* y de composición de transformaciones son también formuladas de modo general e introducidas sistemáticamente como medios de demostración. Aparte de los desplazamientos y de las proyecciones, solamente se conocían hasta entonces algunas transformaciones particulares: algunas transformaciones proyectivas planas, del tipo $x' = a/x$, $y' = y/x$, empleadas por La Hire y Newton, la «afinidad» $x' = ax$, $y' = by$,

[14] Estos «principios» se justifican desde luego (como ya había señalado Cauchy) mediante la aplicación del principio de prolongación de las identidades algebraicas, debido al hecho de que las geometrías «sintéticas» solamente consideran propiedades que se traduzcan analíticamente en identidades de esta naturaleza.

[15] La primera mención de las generatrices rectilíneas de las cuádricas parece deberse a Wren (1669), que señala que el hiperboloide de revolución de una hoja puede ser engendrado por la rotación de una recta alrededor de un eje que no esté en el mismo plano, pero su estudio solamente fue desarrollado por Monge y su escuela.

de Clairaut y Euler ([*108* a] (1), t. IX, cap. XVIII), y, por último, algunas transformaciones cuadráticas particulares, en Maclaurin, Braikenridge, y también en Newton. Monge, en su *Géométrie descriptive*, muestra el uso que puede hacerse de las proyecciones planas en la geometría de tres dimensiones. En Poncelet, uno de los procedimientos sistemáticos de demostración, empleado hasta la saciedad, consiste en reducir mediante una proyección las propiedades de las cónicas a las de la circunferencia (método que había sido empleado ocasionalmente por Desargues y Pascal); y para poder pasar incluso de una cuádrica a una esfera, inventa el primer ejemplo de transformación proyectiva en el espacio, la «homología» ([*252*], t. I, p. 357); por último, es él también quién introduce los primeros ejemplos de transformaciones birracionales de una curva en sí misma. En 1827, Möbius ([*223*], t. I, p. 217) e independientemente Chasles, en 1830 ([*60* b], p. 695), definen las transformaciones lineales proyectivas más generales. En esta misma época aparecen la inversión y otros tipos de transformaciones cuadráticas, cuyo estudio va a ser inaugurado por la teoría de las transformaciones birracionales, que se desarrollará en la segunda mitad del siglo XIX.

D) La noción de *dualidad* aparece con toda claridad, y se la pone en relación conscientemente con la teoría de las formas bilineales. La teoría de los polos y polares respecto de las cónicas, que después de Apolonio solo había hecho algunos progresos por medio de Desargues y La Hire, es extendida a las cuádricas por Monge que, al igual que sus discípulos, se da cuenta de la posibilidad de convertir por este método teoremas conocidos en resultados nuevos [16]. Pero es, también, a Poncelet a quién corresponde el mérito de haber convertido estas observaciones en un método general en su teoría de las transformaciones «por polares recíprocas», y de haber hecho de ellas una herramienta de descubrimiento especialmente eficaz. Un poco después, sobre todo con Gergonne, Plücker, Möbius y Chasles, la noción de dualidad va separándose de las formas cuadráticas, a las que todavía estaba muy ligada en Poncelet. En particular Möbius, al considerar las distintas posibilidades de dualidad en el espacio de dimensión 3 (dualidad definida por una forma bilineal), descubre,

[16] El más conocido es el teorema de Brianchon (1810), transformado por dualidad del teorema de Pascal.

en 1833, la dualidad respecto a una forma bilineal alternada ([*223*], t. I, pp. 489-515)[17], estudiada sobre todo en el siglo XIX bajo la forma de la teoría de los «complejos lineales» y desarrollada en relación con la «geometría de las rectas» y las «coordenadas plückerianas» introducidas por Cayley, Grassmann y Plücker, alrededor de 1860.

E) Desde los comienzos de la Geometría proyectiva, el estudio intensivo de las propiedades de la geometría clásica en relación con el espacio proyectivo había llevado rápidamente a su división en «propiedades proyectivas» y «propiedades métricas»; y, sin duda, no hay ninguna exageración en ver en esta separación una de las manifestaciones más claras, en esta época, de lo que había de convertirse en la noción moderna de estructura. Pero Poncelet, que es el primero en introducir esta distinción y esta terminología, es ya consciente de lo que relaciona los dos tipos de propiedades, y, al abordar en su *Traité* (Tratado) los problemas referentes a los ángulos, cuyas propiedades «*no parecen estar incluidas entre las que nosotros llamamos proyectivas..., sin embargo, se obtienen de una forma tan sencilla*» —dice— «*de los principios que forman la base* [de esta obra]..., *que no creo que ninguna otra teoría geométrica pueda llevar a ella de forma más directa y más simple a la vez. No hay ninguna razón para asombrarse si se considera que las propiedades proyectivas de las figuras son necesariamente las más generales que pueden poseer, de tal modo que deben comprender, como simples corolarios, todas las demás propiedades o relaciones particulares de la extensión*» ([*252*], t I, p. 248). Hay que reconocer que después de esta declaración se experimenta una cierta sorpresa al verle abordar las cuestiones relativas a los ángulos de un modo bastante retorcido, poniéndolos en relación con las propiedades focales de las cónicas, en vez de hacer aparecer directamente los puntos cíclicos; de hecho, hay que esperar 30 años para que Laguerre (todavía alumno de la Escuela Politécnica) dé la expresión del ángulo de rectas mediante la razón doble de estas rectas y las rectas isótropas que pasan por el mismo punto ([*192*], t. II, p. 13). Finalmente, con Cayley ([*58*], t. II, pp. 561-592) aparece claramente la idea fundamental de que las propiedades «métricas» de una figura plana no son otra cosa que las propiedades «proyectivas»

[17] En 1828, Giorgini había encontrado ya la polaridad respecto a una forma alternada a propósito de un problema de Estática [*128*].

de la figura obtenida al añadirle los puntos cíclicos, lo que constituye un paso decisivo hacia el «programa de Erlangen».

F) La *geometría no euclídea hiperbólica*, que surge hacia 1830, permanece al principio apartada del movimiento cuyas líneas principales estamos trazando. Motivada por preocupaciones de orden esencialmente lógico relativas a los fundamentos de la geometría clásica, esta nueva geometría es presentada por sus inventores[18] en la misma forma axiomática y «sintética» que la geometría de Euclides, y sin relación con la Geometría proyectiva (cuya introducción, siguiendo el modelo clásico, parecía incluso excluida *a priori*, puesto que la noción de paralela única desaparece en dicha geometría); a esto es debido, sin duda, el hecho de que no atraiga mucho la atención de las escuelas francesa, alemana e inglesa de Geometría proyectiva. También, cuando Cayley, en la memoria fundamental antes citada ([*58*], t. II, pp. 561-592) tiene la idea de remplazar los puntos cíclicos (considerados como cónica «degenerada tangencialmente») por una cónica cualquiera (que denomina «absoluto»), no piensa, en modo alguno, en relacionar esta idea con la geometría de Lobatschevski-Bolyai, aunque señale de qué manera su concepción conduce a nuevas expresiones para la «distancia» entre dos puntos, y aunque mencione sus relaciones con la Geometría esférica. La situación cambia hacia 1870, cuando las geometrías no euclídeas, después de la difusión de las obras de Lobatschevski, de la publicación de las obras de Gauss, y de la lección inaugural de Riemann, habían alcanzado el primer plano de la actualidad matemática. Siguiendo el camino abierto por Riemann, Beltrami, sin conocer los trabajos de Cayley, vuelve a encontrar, en 1868, las expresiones de la distancia halladas por este último, pero en un contexto completamente diferente, considerando el interior de un círculo como una imagen de una superficie de curvatura constante, en la que las geodésicas vendrían representadas por las rectas [*18* a]; Klein, dos años después, realiza (independientemente de Beltrami) la síntesis de estos distintos puntos

[18] Se sabe que Gauss, en 1816, estaba convencido de la imposibilidad de demostrar el postulado de Euclides, y de la posibilidad lógica de desarrollar una geometría en la que este postulado no se verificase. Pero no publicó sus resultados sobre esta cuestión, y éstos fueron redescubiertos independientemente por Lobatschevski en 1829 y por Bolyai en 1832. Para más detalles, véase [*105* a y b].

de vista, que completa con el descubrimiento del espacio no euclídeo elíptico ([*182*], t. I, pp. 254-305)[19].

G) En la segunda mitad de la época que estamos considerando tiene lugar un periodo de reflexión crítica, durante el cual los partidarios de la geometría «sintética», no contentos con haber expulsado las coordenadas de sus demostraciones, pretenden prescindir de los números reales incluso en los axiomas de la geometría. El principal representante de esta escuela es von Staudt, que consiguió realizar en lo esencial esta proeza [*325*], muy admirada en su tiempo e incluso bien avanzado el siglo XX, y si bien hoy día no se concede la misma importancia a las ideas de este orden, cuyas posibilidades de aplicación fructífera han resultado ser muy escasas, hay, sin embargo, que reconocer que los esfuerzos de von Staudt y de sus discípulos han contribuido a aclarar las ideas relativas al papel de los «escalares» reales o complejos dentro de la geometría clásica, y a introducir de esta forma la concepción moderna de las geometrías sobre un cuerpo de base arbitrario.

Hacia 1860, la geometría «sintética» se halla en su apogeo, pero el fin de su reinado se aproxima con rapidez. Pesada y falta de elegancia a lo largo de todo el siglo XVIII, la Geometría analítica, con Lamé, Bobillier, Cauchy, Plücker y Möbius, adquiere por fin la elegancia y la concisión que le permitirán luchar en igualdad de condiciones con su rival. A partir, sobre todo, de 1850, aproximadamente, las ideas de grupo y de invariante, formuladas finalmente de un modo preciso, van ocupando poco a poco la escena, y se pone de manifiesto que los teoremas de la geometría clásica no son otra cosa que la expresión de relaciones idénticas entre invariantes o covariantes del grupo de las semejanzas[20], del mismo modo que los de la Geometría proyectiva expresan las identidades (o «syzygies») entre covariantes del grupo proyectivo. Esta es la tesis que F. Klein expone magistralmente en su célebre «programa de Erlangen»

[19] El ejemplo de la geometría esférica había hecho creer durante cierto tiempo que en un espacio de curvatura constante positiva existen siempre pares de puntos por los que pasa más de una geodésica.

[20] Por ejemplo, los primeros miembros de las ecuaciones de las tres alturas de un triángulo son covariantes de los tres vértices del triángulo para el grupo de las semejanzas, y el teorema que afirma que estas tres alturas tienen un punto común equivale a decir que los tres covariantes en cuestión son linealmente dependientes.

([*182*], t. I, pp. 460-497), donde preconiza el cese de las querellas estériles entre la tendencia «sintética» y la «analítica». Si, dice, la acusación hecha a esta última de atribuir un papel privilegiado a un sistema arbitrario de ejes «*estaba de sobra justificada en lo referente a la forma defectuosa en que se empleaba en otro tiempo el método de las coordenadas, carece de todo sentido cuando se trata de una aplicación racional de este método... El dominio de la intuición espacial no le está vedado al método analítico...*», y subraya que «*no puede subestimarse el avance que supone un formalismo apropiado para los trabajos posteriores, en tanto que se adelanta, por así decirlo, al pensamiento*» (*loc. cit.*, pp. 488-490).

De este modo llegamos a una clasificación racional y «estructural» de los teoremas de la «geometría» según el grupo del cual proceden: grupo lineal para la geometría proyectiva, grupo ortogonal para las cuestiones métricas, grupo simpléctico para la geometría del «complejo lineal». Pero bajo esta implacable claridad, la geometría clásica —excepción hecha de la geometría algebraica y de la geometría diferencial[21], ya constituidas como ciencias autónomas— se marchita repentinamente y pierde todo su brillo. Ya la generalización de los métodos basados en el empleo de las transformaciones había mecanizado algo la formación de nuevos teoremas: «*Hoy día* —dice Chasles en 1837 en su *Apercu historique* (Perspectiva histórica)— *todo el mundo puede presentarse, tomar una verdad conocida cualquiera, y someterla a los distintos principios generales de transformación, obteniendo a partir de ella otras verdades diferentes o más generales, y éstas a su vez serán susceptibles de parecidas operaciones, de tal modo que se podrá multiplicar, casi hasta el infinito, el número de las nuevas verdades deducidas de la primera... Así pues todo el que quiera puede, en el estado actual de la ciencia, generalizar y crear en Geometría, ya no es indispensable el genio para añadir una piedra*

[21] No vamos a hacer aquí la historia de estas dos disciplinas ni a examinar en detalle la influencia del «programa de Erlangen» sobre su desarrollo posterior. Señalaremos únicamente que la geometría algebraica, después de más de cien años de actividad, es hoy más estudiada que nunca; en lo que a la geometría diferencial se refiere, después de un brillante florecimiento con Lie, Darboux y sus discípulos, parecía amenazada por la misma esclerosis que la geometría elemental clásica, cuando los trabajos contemporáneos (originados sobre todo en las ideas de E. Cartan) sobre los espacios fibrados y los problemas «globales» le han devuelto toda su vitalidad.

al edificio» ([*60* b], pp. 268-269). Pero la situación se aclara todavía más con los progresos de la teoría de los invariantes, que consigue por fin (al menos para los grupos «clásicos») la formulación de métodos generales que permiten (en principio) escribir *todos* los covariantes algebraicos y *todos* sus «syzygies» de modo puramente automático; victoria que, simultáneamente, supone la muerte, como campo de investigación, de la misma teoría clásica de los invariantes, y de la geometría «elemental»[22], que se había convertido prácticamente en un diccionario de ella. Sin duda, no hay nada que permita predecir *a priori*, entre los infinitos «teoremas» que pueden obtenerse a voluntad de este modo, cuales serán aquellos cuyo enunciado, en un lenguaje geométrico apropiado, tendrá una elegancia y una simplicidad comparable a las de los resultados clásicos, y éste continúa siendo un dominio restringido en el que siguen ejercitándose felizmente numerosos aficionados (geometría del triángulo, geometría del tetraedro, de las curvas y superficies algebraicas de grado pequeño, etc.). Pero para el matemático profesional la mina está agotada, puesto que ya no hay problemas de estructura, susceptibles de tener repercusiones sobre otras ramas de las matemáticas, y este capítulo de la teoría de los grupos y de los invariantes puede considerarse cerrado hasta nueva orden[23].

De este modo, después del programa de Erlangen, las geometrías euclídeas y no euclídeas, desde el punto de vista puramente algebraico, se han convertido en simples lenguajes, más o menos cómodos, para expresar los resultados de la teoría de las formas bilineales, cuyos progresos van a la par con los de la teoría de los inva-

[22] Esta palabra se toma aquí en el sentido de Klein, precisado en la página 186; algunos matemáticos la emplean en un sentido mucho más amplio, abarcando todos los problemas matemáticos que pueden presentarse a propósito del plano o del espacio de tres dimensiones, incluyendo problemas complicados relativos a la teoría de los conjuntos convexos, a la topología y a la teoría de la medida. Por supuesto, aquí no nos referimos a tales problemas.

[23] Desde luego, esta inevitable decadencia de la geometría (euclídea o proyectiva) que es evidente a nuestros ojos, pasó desapercibida durante mucho tiempo a los contemporáneos, y hasta 1900 esta disciplina siguió siendo en apariencia una rama importante de las matemáticas, como testimonia por ejemplo el lugar que ocupa en la *Enzyklopädie* (Enciclopedia); y hasta estos últimos años ocupaba todavía este lugar en la enseñanza universitaria.

riantes[24]. Todo lo referente a la noción de *rango* de una forma bilineal y a las relaciones entre estas formas y las transformaciones lineales es aclarado definitivamente por los trabajos de Frobenius ([*119*], t. I, pp. 343-405). Se debe también a Frobenius la expresión canónica de una forma alternada sobre un Z-módulo libre ([*119*], t. I, pp. 482-544); sin embargo, los determinantes hemisimétricos ya habían aparecido en Pfaff, a principios de siglo, a própósito de la reducción de las formas diferenciales a una forma normal; Jacobi, que vuelve a plantearse este problema en 1827 ([*171*], t. IV, pp. 17-29) sabe que un determinante hemisimétrico de orden impar es nulo, y es él quien forma la expresión del pfaffiano y demuestra que se trata de un factor del determinante hemisimétrico de orden par, pero no se dio cuenta de que este último es el cuadrado del pfaffiano; este punto no fue establecido hasta 1849 por Cayley ([*58*], t. I, pp. 410-413). La noción de forma bilineal simétrica asociada a una forma cuadrática es el caso más elemental del proceso de «polarización», una de las herramientas fundamentales de la teoría de los invariantes. Con el nombre de «producto escalar», esta noción tendrá un enorme éxito, primero con los vulgarizadores del «cálculo vectorial», y, después, a partir del siglo XX, gracias a la generalización inesperada aportada por los espacios de Hilbert (véase p. 292). También es esta última teoría la encargada de poner en evidencia la noción de adjunto de un operador (que hasta entonces solo había aparecido en la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales, y, en el cálculo tensorial, en el baile de índices covariantes y contravariantes dirigidos por la batuta del tensor métrico); también es esta teoría la que dará toda su importancia a la noción de forma hermítica, introducida en primer lugar por Hermite en el curso de trabajos aritméticos ([*159*], t. I, p. 237), pero que había quedado un poco al margen de las grandes corrientes matemáticas hasta 1925 y la aplicación de los espacios de Hilbert complejos a las teorías cuánticas.

El estudio del grupo ortogonal y del grupo de las semejanzas —claramente concebidas y tratadas como tales desde mediados del siglo XIX, y convertidas en el centro de la teoría de las formas cuadrá-

[24] En particular, el interés atribuido a la geometría no euclídea no proviene de este aspecto algebraico banal, sino más bien de sus relaciones con la geometría diferencial y la teoría de funciones de variables complejas.

ticas— así como el de los otros grupos «clásicos» (grupo lineal, grupo simpléctico, y grupo unitario) toma por otra parte una importancia cada vez mayor. No podemos dejar de señalar aquí el papel fundamental desempeñado por estos grupos en la teoría de los grupos de Lie y la geometría diferencial, por una parte, y en la teoría aritmética de las formas cuadráticas (ver por ejemplo [*285*] y [*100*]) por otra[25]; a esta circunstancia, así como a la extensión del concepto de dualidad a las cuestiones más diversas, es debido el hecho de que no haya apenas ninguna teoría matemática moderna en la que las formas bilineales no aparezcan de un modo u otro. Debemos en todo caso señalar que fue el estudio del grupo de las rotaciones (en tres dimensiones) lo que llevó a Hamilton al descubrimiento de los cuaterniones [*145* a], este descubrimiento es generalizado por Clifford en 1876, introduciendo las álgebras que llevan su nombre, y demostrando que se trata de productos tensoriales de álgebra de cuaterniones, o de álgebras de cuaterniones y de una extensión cuadrática ([*65*], pp. 266-276). Vueltas a descubrir cuatro años después por Lipschitz [*205* b], que las emplea para dar una representación paramétrica de las transformaciones ortogonales para n variables (generalizando las obtenidas por Cayley para $n = 3$ ([*58*], t. I, pp. 123-126) y $n = 4$ (t. II, pp. 202-215) mediante la teoría de los cuaterniones), estas álgebras, y la noción de «spinor», que se deriva de ellas ([*52* b] y [*62* a]) conocerían un gran auge en la época moderna debido a su utilización en las teorías cuánticas.

Nos falta por último decir unas palabras acerca de la evolución de las ideas que ha llevado al abandono casi total de cualquier restricción relativa al anillo de escalares en la teoría de las formas sesquilineales, tendencia que es común a toda el álgebra moderna, pero que quizá se manifiesta en este campo antes que en otros. Ya hemos señalado lo fructífero de la introducción de la geometría sobre el cuerpo de los números complejos (que, por otra parte, durante todo el siglo XIX, fue acompañada de una confusión permanente, y a veces peligrosa, entre esta geometría y la geometría real); la claridad sobre este punto es aportada fundamentalmente por los

[25] Sin hablar de las teorías cuánticas, en las que son muy utilizadas las representaciones lineales de los grupos ortogonales, ni de la teoría de la relatividad, que llamó la atención sobre el «grupo de Lorentz» (grupo ortogonal para una forma de signatura (3, 1)).

estudios axiomáticos de finales del siglo XIX sobre los fundamentos de la geometría [*163* c]. A lo largo de estos trabajos, Hilbert y sus competidores, sobre todo, al examinar las relaciones entre los distintos axiomas fueron llevados a construir contraejemplos adecuados, en los que el «cuerpo de base» (conmutativo o no) poseía propiedades más o menos patológicas, acostumbrando de esta forma a los matemáticos a «geometrías» de un tipo completamente nuevo. Desde el punto de vista analítico, ya Galois había considerado transformaciones lineales en las que los coeficientes y las variables tomaban valores en un cuerpo primo finito ([123], p. 145), al desarrollar estas ideas, Jordan se ve llevado de modo natural a considerar los grupos clásicos sobre estos cuerpos [*174* a], grupos que intervienen en distintos dominios de las matemáticas. Dickson, hacia 1900, extiende los trabajos de Jordan a todos los cuerpos finitos, y más recientemente se ha observado que una gran parte de la teoría de Jordan-Dickson se extiende al caso de un «cuerpo de base» cualquiera; esto se debe esencialmente a las propiedades generales de los vectores isótropos y al teorema de Witt, que, resultando triviales en los casos clásicos, no son establecidos para un cuerpo de base arbitrario hasta 1936 [*337* a][26].

Pero, a la vez que se llevaba de este modo hacia una «abstracción» cada vez mayor el estudio de las formas sesquilineales, se ha revelado extraordinariamente sugestivo conservar sin modificaciones la terminología, que, en el caso de los espacios de dimensión 2 y 3, procedía de la geometría clásica, y extenderla al caso de dimensión n, e incluso al de dimensión infinita. Superada en tanto que ciencia viva y autónoma, la geometría clásica se ha convertido de este modo en un lenguaje universal de la matemática contemporánea, dotado de una flexibilidad y comodidad incomparables.

[26] Para más detalles sobre estas cuestiones, véase [*90* b].

ESPACIOS TOPOLOGICOS

Las nociones de límite y de continuidad se remontan a la antigüedad, sería imposible hacer una historia completa de ellas sin estudiar sistemáticamente desde este punto de vista, no solamente los matemáticos, sino también los filósofos griegos, especialmente Aristóteles, ni tampoco sin seguir la evolución de estas ideas a lo largo de las matemáticas del Renacimiento y los comienzos del cálculo diferencial e integral. Dicho estudio, que resultaría sin duda alguna interesante, excedería con mucho los límites de esta nota.

Riemann debe ser considerado como el creador de la topología, como de tantas otras ramas de la matemática moderna: él es, en efecto, el primero en llegar a la noción de espacio topológico, concibe la idea de una teoría autónoma de estos espacios, define algunos invariantes (los «números de Betti») que debían desempeñar un papel muy importante en el desarrollo posterior de la topología, y a él se deben las primeras aplicaciones de la topología al análisis (periodos de las integrales abelianas). Sin embargo, hay que tener en cuenta que el movimiento de ideas de la primera mitad del siglo XIX había contribuido de diversas formas a preparar el camino de Riemann. Efectivamente, el deseo de asentar las matemáticas sobre una base sólida, que ha sido la causa de tantos trabajos importantes a lo largo de todo el siglo XIX, e incluso hasta nuestros días, había

conducido a la definición correcta de la noción de serie convergente y de sucesión de números tendiendo hacia un límite (Cauchy, Abel) y la de función continua (Bolzano, Cauchy). Por otra parte, la representación geométrica (mediante los puntos de un plano) de los números complejos, o, como se los había llamado hasta entonces, «imaginarios» (llamados también a veces, en el siglo XVIII, números «imposibles») representación debida a Argand y a Gauss (véase p. 220), era ya familiar a la mayor parte de los matemáticos; constituyendo un progreso del mismo orden que pueda serlo en nuestros días la adopción del lenguaje geométrico en el estudio de los espacios de Hilbert, y llevaba en potencia la posibilidad de una representación geométrica de todo objeto susceptible de variación continua. Gauss, que además se veía llevado naturalmente a estas concepciones por sus trabajos sobre los fundamentos de la geometría, sobre la geometría no euclídea y sobre las superficies curvas, parece haber considerado ya esta posibilidad, puesto que emplea las palabras «magnitud extendida dos veces» al definir (independientemente de Argand y de los matemáticos franceses) la representación geométrica de los imaginarios ([*124* a], t. II, pp. 101-103, y pp. 175-178).

Sus trabajos sobre las funciones algebraicas y sus integrales, por una parte, y sus reflexiones (considerablemente inspiradas por el estudio de los trabajos de Gauss) sobre los fundamentos de la geometría por otra, llevaron a Riemann a formular un programa de estudios que es el mismo de la topología moderna, y a comenzar la realización de tal programa. Veamos por ejemplo cómo se expresa en su Teoría de las funciones abelianas ([*259* a], p. 91):

«*En el estudio de las funciones que se obtienen a partir de la integración de diferenciales exactas, algunos teoremas de análisis situs son casi indispensables. Mediante este nombre, que ha sido empleado por Leibniz, aunque tal vez en un sentido ligeramente diferente, designamos la parte de la teoría de las magnitudes continuas que estudia tales magnitudes, no como independientes de su posición y medibles unas por medio de otras, sino haciendo abstracción de toda idea de medida, y estudiando únicamente sus relaciones de posición y de inclusión. Me reservo el tratar más tarde esta cuestión, de una manera completamente independiente de toda medida*...»

Y en su célebre Lección inaugural «Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría» ([*259* a], p. 272):

«...*La noción general de magnitud extendida varias veces*[1], *que contiene como caso particular la de magnitud espacial, ha permanecido totalmente inexplorada*...» (p. 272).

«...*La noción de magnitud supone un elemento susceptible de diferentes determinaciones. Según sea posible o no pasar de una determinación a otra por medio de transiciones continuas, estas determinaciones formarán una multiplicidad continua* (*y diremos que son sus puntos*) *o una multiplicidad discreta*» (p. 273).

«...*La medida consiste en una superposición de las magnitudes que se han de comparar; para medir resulta pues necesario un medio de llevar una magnitud sobre otra. Careciendo de este medio, solamente se pueden comparar dos magnitudes si una de ellas es parte de la otra... Los estudios que se pueden hacer entonces sobre esta cuestión constituyen una parte de la teoría de magnitudes, independiente de la medida, y donde no se considera que las magnitudes tengan una existencia independiente de su posición, ni como expresables por medio de una unidad de medida, sino como las partes de una multiplicidad. Tales estudios se han hecho necesarios en varias partes de las matemáticas, particularmente en la teoría de las funciones multiformes*...» (p. 274).

«...*La determinación de la posición dentro de una multiplicidad dada se reduce así, siempre que sea posible, a un número finito de determinaciones numéricas. Es cierto que hay multiplicidades en las que la determinación de la posición exige, no ya un número finito, sino una sucesión infinita o bien una multiplicidad continua de determinaciones de magnitudes. Tales multiplicidades están formadas por ejemplo por las determinaciones posibles de una función en un dominio dado, las posiciones de una figura en el espacio, etc.*» (p. 276).

Puede observarse, en esta última frase, la primera idea de un estudio de los espacios funcionales; por otra parte, la misma idea se encuentra expresada ya en la Disertación de Riemann; cuando dice a propósito del problema de mínimo conocido con el nombre de principio de Dirichlet, «*El conjunto de estas funciones forma un dominio conexo, cerrado en sí*» ([*259* a], p. 30), que constituye, aunque en forma imperfecta, el germen de la demostración que daría más tarde Hilbert del principio de Dirichlet, e incluso de la

[1] Riemann entiende por tal, como lo muestra la continuación, una parte de un espacio topológico de un número cualquiera de dimensiones.

mayor parte de las aplicaciones de los espacios funcionales al cálculo de variaciones.

Como ya hemos dicho, Riemann comenzó a llevar a cabo este programa grandioso, definiendo los «números de Betti» de una superficie ([*259* a], pp. 92-93) en primer lugar, y después de una multiplicidad de dimensión cualquiera (*ibid.*, pp. 479-482; cf. también [*259* c]), y aplicando esta definición a la teoría de las integrales. Estos resultados inauguran la Topología algebraica, rama de las matemáticas cuyo desarrollo no ha dejado de ganar en importancia desde principios del siglo XX, y del que no vamos a hablar aquí.

En lo que se refiere a la teoría general de los espacios topológicos, tal y como había sido vislumbrada por Riemann, necesitaba para su desarrollo que las teorías de los números reales, de los conjuntos de números, de los conjuntos de puntos sobre la recta, el plano, y el espacio, fuesen estudiadas de una forma mucho más sistemática de como lo habían sido hasta la época de Riemann. Por otra parte, este estudio estaba relacionado con los trabajos sobre la naturaleza de los números irracionales (filosóficos a medias en Bolzano, esencialmente matemáticos en Dedekind), y con los progresos de la teoría de funciones de variable real (a la que el mismo Riemann hizo importantes aportaciones con su definición de la integral y su teoría de las series trigonométricas, y que fue objeto, entre otros, de los trabajos de du Bois-Reymond, Dini, y Weierstrass). Esta teoría fue un fruto de la segunda mitad del siglo XIX, y muy especialmente de Cantor, que fue el primero en definir (primeramente en la recta, y después en el espacio de *n* dimensiones) las nociones de punto de acumulación, de conjunto cerrado, abierto, perfecto, y obtuvo los resultados esenciales acerca de la estructura de estos conjuntos en la recta (cf. p. 213). Además de las Obras de Cantor [*47*], puede consultarse también su correspondencia con Dedekind [*48*], extraordinariamente interesante, y en la que se encontrará, expresada con toda claridad, la idea del número de dimensiones considerado como invariante topológico.

Los avances posteriores de la teoría son expuestos, por ejemplo, en forma a medias histórica y a medias sistemática, en el libro de Schoenflies [*275* a]; el más importante de ellos es sin duda el teorema de Borel-Lebesgue (demostrado en primer lugar por Borel para un

intervalo cerrado de la recta y una familia numerable de intervalos abiertos que lo recubren).

Las ideas de Cantor habían tropezado al principio con una oposición bastante fuerte (cf. p. 48). Al menos, su teoría de los conjuntos de puntos sobre la recta y el plano fue enseguida utilizada y se extendió ampliamente entre las escuelas francesa y alemana de la teoría de funciones (Jordan, Poincaré, Klein, Mittag-Leffler, y después Hadamard, Borel, Baire, Lebesgue, etc.); en particular, cada uno de los primeros volúmenes de la colección Borel contiene una exposición elemental de esta teoría (véase por ejemplo [*32* a]). A medida que estas ideas se van extendiendo, empieza a pensarse en su posible aplicación a conjuntos, no ya de puntos, sino de curvas o de funciones, idea que aparece, por ejemplo, en 1884, en el título «Sobre las curvas límite de una variedad de curvas» de una memoria de Ascoli [*10*], y que se manifiesta en una comunicación de Hadamard al congreso de matemáticos de Zurich en 1896 [*141*]. Estrechamente relacionada con lo anterior está la introducción de las llamadas «funciones de línea» por Volterra en 1887, y a la creación del «cálculo funcional», o teoría de funciones cuyo argumento es otra función (puede consultarse la obra de Volterra sobre el Análisis funcional [*322* b]). Por otro lado, en la célebre memoria ([*163* a], t. III, pp. 10-37) en que Hilbert, enlazado en este punto con las ideas de Riemann, demostraba la existencia del mínimo en el principio de Dirichlet, e inauguraba el «método directo» del cálculo de variaciones, aparecía claramente el interés de considerar conjuntos de funciones en los que pueda aplicarse el principio de Bolzano-Weierstrass, es decir, aquellos en los que toda sucesión contiene una sucesión parcial convergente. Efectivamente, conjuntos de este tipo deberían desempeñar enseguida un papel importante, no solo en el cálculo de variaciones, sino también en la teoría de funciones de una variable real (Ascoli, Arzelà) y en la de funciones de variable compleja (Vitali, Carathéodory, Montel). Por último, el estudio de las ecuaciones funcionales, y muy especialmente la resolución por Fredholm de la ecuación que lleva su nombre [*116*], sentó el hábito de considerar una función como un argumento, y un conjunto de funciones como análogo a un conjunto de puntos, a propósito del cual resulta tan natural el uso de un lenguaje geométrico como a propósito de los puntos de un espacio euclídeo de n dimensiones (espacio que también escapa a la «intuición», y que, por esta razón, ha sido objeto durante largo tiempo de la desconfianza de muchos matemáticos). En particular, los memorables trabajos de Hilbert sobre las ecuaciones integrales [*163* b] culminaron con la definición y el estudio del espacio de Hilbert por Erhard Schmidt [*274* b], en completa analogía con la geometría euclídea (véase p. 291).

Sin embargo, la noción de teoría axiomática había ido tomando una importancia cada vez mayor, gracias sobre todo a los numerosos trabajos sobre los fundamentos de la geometría, entre los cuales los de Hilbert [*163* c], ejercieron una influencia especialmente decisiva; a lo largo de estos mismos trabajos, Hilbert se había visto llevado a dar, justamente, en 1902 ([*163* c], p. 180) una primera definición axiomática de la «multiplicidad extendida dos veces» en el sentido de Riemann, definición que constituía, según decía, «el fundamento de un tratamiento axiomático riguroso del análisis situs», y empleaba ya los entornos (en un sentido restringido debido a las exigencias del problema al que entonces se limitaba Hilbert).

Los primeros intentos para separar lo que hay de común en las propiedades de los conjuntos de puntos y de funciones (sin intervención de la noción de distancia) fueron realizados por Fréchet [*115* a] y F. Riesz [*260* b], pero el primero, que partía de la noción de límite numerable, no consiguió llegar a construir para espacios no metrizables un sistema de axiomas cómodo y fecundo. Reconoció no obstante el parentesco entre el principio de Bolzano-Weierstrass y el teorema de Borel-Lebesgue, y en relación con esto introduce la palabra «compacto», aunque empleándola en un sentido algo diferente del que tiene hoy. En lo que se refiere a F. Riesz, que partía de la noción de punto de acumulación (o más bien, lo que viene a ser lo mismo, de conjunto «derivado»), su teoría era incompleta todavía, y no pasó además de ser un esbozo.

Con Hausdorff ([*152* a], c. 7-8-9) comienza la topología general en el sentido que se le da hoy día. Volviendo a la noción de entorno, sabe elegir de entre los axiomas de Hilbert para los entornos en el plano, aquellos capaces de dar simultáneamente a su teoría toda la precisión y toda la generalidad deseables. El capítulo en el que desarrolla sus consecuencias ha quedado como un modelo de teoría axiomática, abstracta pero de antemano adaptada a las aplicaciones.

Este fue naturalmente el punto de partida de los trabajos posteriores sobre la topología general, y sobre todo de los trabajos de la escuela de Moscú, en gran parte orientados hacia el problema de la metrización (cf. p. 226). Debemos aquí recordar sobre todo la definición por Alexandroff y Urysohn de los espacios compactos (con el nombre de espacios «bicompactos»), y después la demostración por Tychonoff [*313*] de la compacidad de los productos de espacios compactos. Por último, la introducción de los filtros por H. Cartan [*53*], además de aportar un precioso instrumento para toda clase de aplicaciones (en las que sustituye ventajosamente a la noción de «convergencia en el sentido de Moore-Smith» [*227*]), ha contribuido, gracias al teorema de los ultrafiltros, a acabar de iluminar y de simplificar la teoría.

ESPACIOS UNIFORMES

Las principales nociones y proposiciones relativas a los espacios uniformes han ido surgiendo poco a poco a partir de la teoría de funciones de variables reales, y no han sido objeto de ningún estudio sistemático hasta una fecha reciente. Cauchy, intentando fundamentar rigurosamente la teoría de las series (cf. p. 212), tomó como punto de partida un principio que parece haber considerado como evidente, según el cual una condición necesaria y suficiente para la convergencia de una sucesión (a_n) es que $|a_{n+p} - a_n|$ sea tan pequeño como se quiera cuando n sea bastante grande (véase por ejemplo ([*56* a] (2), t. VII, p. 267)). Junto con Bolzano [*27* c], Cauchy fue uno de los primeros en enunciar este principio explícitamente, y en reconocer su importancia, de aquí el nombre de «sucesión de Cauchy» dado a las sucesiones de números reales que satisfacen la condición citada, y, por extensión, a las sucesiones (x_n) de puntos en un espacio métrico tales que la distancia de x_{n+p} a x_n sea tan pequeña como se quiera cuando n es bastante grande; de aquí por último el nombre de «filtro de Cauchy» dado a la generalización de las sucesiones de Cauchy en los espacios uniformes.

Cuando los matemáticos dejaron de contentarse con la definición intuitiva de número real, y se intentó, queriendo dar al Análisis un fundamento sólido, definir los números reales a partir de

los números racionales, fue precisamente el principio de Cauchy el que proporcionó la más fecunda de las definiciones propuestas durante la segunda mitad del siglo XIX: nos referimos a la definición de Cantor ([*47*], pp. 93-96) (desarrollada también, entre otros, y siguiendo las ideas de Cantor, por Heine [*154* b], y, sin duda independientemente, por Méray), según la cual se hace corresponder un número real a cada sucesión de Cauchy («sucesión fundamental» en la terminología de Cantor) de números racionales; un mismo número real corresponderá a dos sucesiones de Cauchy de números racionales (a_n) y (b_n) si $|a_n - b_n|$ tiende hacia 0, y únicamente en este caso. La idea esencial es aquí la de que el conjunto **Q** de los números racionales es «incompleto» desde un cierto punto de vista, y que el conjunto de los números reales es el conjunto «completo» que se obtiene «completando» **Q**.

Por otro lado, Heine, en sus trabajos, ampliamente inspirados por las ideas de Weierstrass y Cantor, es el primero en definir la continuidad uniforme para las funciones reales de una o varias variables reales [*154* a], y demuestra que toda función real continua sobre un intervalo cerrado y acotado de **R** es uniformemente continua en él [*154* b], es el «teorema de Heine». Este resultado está ligado a la compacidad de un intervalo cerrado y acotado en **R** («teorema de Borel-Lebesgue», cf. p. 196), y la demostración dada por Heine de su teorema puede servir, con ciertas modificaciones, para demostrar el teorema de Borel-Lebesgue (lo que les ha parecido a algunos autores una razón suficiente para darle el nombre de «teorema de Heine-Borel»).

La extensión de estas ideas a espacios más generales se realizó al estudiarse, primeramente en casos particulares, y después en general, los espacios métricos en los que una distancia (función numérica de los pares de puntos verificando ciertos axiomas) dada define a la vez una topología y una estructura uniforme. Fréchet, que fue el primero en dar la definición general de estos espacios, reconoció la importancia del principio de Cauchy [*115* a], e introdujo también para los espacios métricos la noción de espacio precompacto (o «totalmente acotado» [*115* a y b]). Hausdorff que desarrolló en su «Mengenlehre» (Teoría de conjuntos) [*152* a y b] una gran parte de la teoría de los espacios métricos, reconoció que la construcción de Cantor antes mencionada puede aplicarse a estos espacios, obteniendo de este modo a partir de todo espacio métrico no «completo» (es decir, en el que no es válido el principio de Cauchy) un espacio métrico «completo».

Los espacios métricos son «espacios uniformes» de un tipo particular, los espacios uniformes no han sido definidos de un modo general hasta muy recientemente por A. Weil [*330* b]. Anteriormente solo se sabía utilizar las nociones y los resultados relativos a los espacios uniformes cuando se trataba de espacios métricos, esto explica el importante papel desempeñado en muchos trabajos modernos de topología por los espacios métricos o metrizables (y en particular por los espacios compactos metrizables) en cuestiones en las que la distancia no era de ninguna utilidad. Una vez que se dispone de la definición de espacio uniforme, no hay ninguna dificultad (sobre todo disponiendo de la noción de filtro) en extender a estos espacios casi toda la teoría de los espacios métricos, tal y como es expuesta, por ejemplo, por Hausdorff, ni en extender de la misma forma, por ejemplo, a todos los espacios compactos, los resultados expuestos para los espacios métricos compactos en la Topología de Alexandroff-Hopf [*4*]. En particular, el teorema de complección de los espacios uniformes no es otra cosa que la trasposición, sin ninguna modificación esencial, de la construcción de Cantor de los números reales.

NUMEROS REALES

Toda medida de una magnitud implica una noción confusa de número real. Desde el punto de vista matemático, los orígenes de la teoría de los números reales se remontan a la formación progresiva, dentro de la ciencia babilónica, de un sistema de numeración capaz (en principio) de designar valores tan aproximados como se quiera de todo número real [*232*]. La posesión de un sistema de este tipo, y la confianza en el cálculo numérico a la que no puede por menos de llegarse como consecuencia, dan lugar inevitablemente, en efecto, a una noción «intuitiva» de número real, que no es muy diferente de la que hoy día aparece (unida al sistema de numeración decimal) en la enseñanza elemental, o entre los físicos e ingenieros. Esta noción no se deja definir con exactitud, pero puede expresarse diciendo que un número se considera definido por la posibilidad de obtener valores aproximados de él, y de introducir dichos valores en el cálculo, lo que, por otra parte, implica necesariamente un cierto grado de confusión entre las medidas de magnitudes dadas en la experiencia, que, naturalmente, no son susceptibles de aproximación indefinida, y «números» tales como $\sqrt{2}$ (en el supuesto de que estemos en posesión de un algoritmo para la aproximación indefinida de éste).

Un punto de vista «pragmático» de este tipo vuelve a aparecer en todas las escuelas matemáticas en las que la habilidad en el cálculo prevalece sobre el deseo de rigor y las preocupaciones teóricas. En la matemática griega, por el contrario, son estas últimas las que predominan, a ella debemos la primera teoría rigurosa y coherente de las razones de magnitud, es decir, esencialmente, de los números reales; dicha teoría es la coronación de una serie de descubrimientos sobre las proporciones, y en particular sobre las razones inconmensurables, cuya importancia en la historia del pensamiento griego nunca se subrayará bastante, pero acerca de la cual, careciendo de textos precisos, solamente podemos discernir con dificultad las grandes líneas. En sus comienzos la matemática griega está indisolublemente ligada a una serie de especulaciones, en parte científicas, en parte filosóficas y místicas, sobre las proporciones, las semejanzas y las razones, en particular las «razones simples» (es decir, aquellas expresables mediante fracciones cuyo numerador y cuyo denominador son números pequeños); una de las tendencias características de la escuela pitagórica fue la de pretender explicarlo todo por medio del número entero y de las razones de enteros. Pero fue justamente la misma escuela pitagórica la que descubrió la inconmensurabilidad del lado del cuadrado respecto a su diagonal (la irracionalidad de $\sqrt{2}$), lo que sin duda constituye el primer ejemplo de una demostración de imposibilidad en matemáticas; el simple hecho de plantearse este problema supone una distinción clara entre una razón y sus valores aproximados, y es un dato suficiente para indicar la enorme distancia que separa a los matemáticos griegos de sus antecesores[1].

[1] El descubrimiento de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ es atribuido por unos al mismo Pitágoras, parece que sin autoridad suficiente, y por otros a algún pitagórico del siglo V; se está de acuerdo, según el testimonio de Platón en su *Theeteto*, en atribuir a Teodoro de Cirene la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, «*y así sucesivamente hasta* $\sqrt{17}$»; después de lo cual Theeteto habría obtenido, bien una demostración general para $\sqrt{N}$ (N = entero no cuadrado perfecto), bien en todo caso (si, como puede ser, la demostración de Teodoro era general en su principio) habría procedido a una clasificación de ciertos tipos de irracionales. No se sabe si estas primeras demostraciones de irracionalidad procedían por vía aritmética o geométrica: véase ([*148*], c. IV); cf. también [*153* a], [*321*] y [*151*].

Estamos mal informados acerca de la corriente de ideas que acompañó y siguió a este importante descubrimiento[2]. Nos limitaremos sumariamente a señalar las principales ideas que están en la base de la teoría de las razones de magnitudes, teoría que, edificada por el gran matemático Eudoxio (contemporáneo y amigo de Platón), fue adoptada definitivamente por la matemática griega clásica, y nos ha sido dada a conocer por los *Elementos* de Euclides [*107*], en los que está expuesta magistralmente (en el Libro V).

1) La palabra y la idea de *número* se reservan estrictamente para los enteros naturales > 1 (1 es la mónada, y no un número propiamente dicho), excluyendo, no solamente nuestros números irracionales, sino también los que nosotros llamamos números racionales, que eran, para los matemáticos griegos de la época clásica, razones de números. Se trata de algo mucho más importante que una simple cuestión de terminología, al estar ligada para los griegos (y para los modernos hasta una época reciente) la palabra número a la idea de *sistema con dos leyes de composición* (adición y multiplicación). Las razones de enteros son concebidas por los matemáticos griegos clásicos como operadores definidos sobre el conjunto de los enteros o sobre una parte de este conjunto (la razón de p a q es el operador que hace corresponder a N, *si* N *es múltiplo de* q, el entero $p.(N/q)$), formando un grupo multiplicativo, pero no un sistema con dos leyes de composición. En este punto los matemáticos griegos se apartan voluntariamente de los «logísticos» o calculadores profesionales que, al igual que sus antecesores egipcios o babilonios, no tenían ningún escrúpulo en considerar las fracciones o las sumas de un entero y una fracción como números. Parece por otra parte que esta restricción de la idea de número se debe mucho más a motivos filosóficos que matemáticos, y como consecuencia de las reflexiones de los primeros pensadores griegos sobre lo uno y lo múltiple, no pudiéndose (en este sistema de pensamiento) dividir la unidad sin perder por ello su carácter de unidad[3].

[2] Se podrá consultar en particular [*153* a], [*309* b y c], y además las obras citadas en la nota anterior, así como [*317* c].

[3] Platón ([*250*], libro VII, 525) se burla de los calculadores *«que cambian la unidad por pequeñas monedas»*, y nos dice que donde éstos dividen, los sabios multiplican, lo que quiere decir que, por ejemplo, para el matemático, la igualdad

2) La teoría de las magnitudes está fundada axiomáticamente, y es válida para todo tipo de magnitudes (aparecen alusiones a teorías anteriores que, a lo que parece, consideraban separadamente las áreas, los volúmenes, los tiempos, etc). Las magnitudes de la misma especie se caracterizan por el hecho de ser susceptibles de comparación (es decir, que se supone definida la igualdad, que es una equivalencia propiamente hablando, y las relaciones > y <), de poder ser sumadas y restadas (está definido A + B y A − B si A > B), y verifican el axioma llamado «de Arquímedes»; este último se concibe claramente desde el principio como el punto clave de la teoría (efectivamente, es indispensable para toda caracterización axiomática de los números reales); el nombre de Arquímedes le ha sido adjudicado de una forma puramente casual, y él mismo insiste en su «Cuadratura de la parábola» ([*5* b], t. II, p. 265) en el hecho de que este axioma había sido empleado por sus antecesores, que desempeña un papel fundamental en los trabajos de Eudoxio, y que las consecuencias que se deducen de él no son menos ciertas que las determinaciones de áreas y volúmenes realizadas sin su ayuda[4].

Es fácil ver que a partir de este fundamento axiomático se llega necesariamente a la teoría de los números reales. Señalaremos que para Eudoxio, las magnitudes de una especie dada forman un sistema con *una* ley de composición interna (la adición), pero que este sistema posee asimismo una ley de composición *externa* teniendo como operadores las *razones de magnitudes*, y considerando que estas últimas forman un *grupo multiplicativo* abeliano. Si A y A′ son magnitudes de la misma especie, y lo mismo B y B′, las *razones* de A y A′ y de B y B′ se *definen* como iguales si, cualesquiera que sean los enteros m y m', mA < m'A′ implica mB < m'B′, y mA > m'A′ implica mB > m'B′; de forma análoga se definen las desigualdades entre razones. El hecho de que estas razones formen un *dominio de operadores* para toda clase de magnitudes es equivalente

de dos razones a/b y c/d se constata, no dividiendo a por b y c por d, lo que conduce en general a un cálculo con fracciones (así es como habrían operado también los egipcios o los babilonios), sino verificando que $a \, . \, d = b \, . \, c$, y otros hechos semejantes.

[4] Alusión manifiesta a polémicas que no nos han sido conservadas: se creería estar oyendo hablar a un moderno acerca del axioma de Zermelo.

al axioma (no explicitado, aunque es utilizado varias veces en la redacción de Euclides) de la existencia de la cuarta proporcional: dados una razón A/A' y B', existe B, de la misma especie que B', tal que A/A' = B/B'. De este modo la idea genial de Eudoxio permitía identificar los dominios de operadores definidos para toda especie de magnitudes[5]; de una manera análoga se puede identificar el conjunto de las razones de enteros (ver más arriba) con *una parte* del conjunto de las razones de magnitudes, a saber, con el conjunto de razones racionales (razones de magnitudes conmensurables). Sin embargo, a causa de estar definidas estas razones, en tanto que operadores sobre los enteros, solamente sobre una parte del conjunto de éstos, resultaba necesario desarrollar su teoría separadamente (Libro VII de Euclides).

Este dominio universal de operadores así construido era para los matemáticos griegos el equivalente de lo que es para nosotros el conjunto de los números reales; está claro por otra parte que con la *adición* de magnitudes y con la *multiplicación* de las razones de magnitudes, poseían el equivalente de lo que es para nosotros el *cuerpo* de los números reales, aunque en una forma mucho menos manejable[6]. Podemos por otra parte preguntarnos si consideraban estos conjuntos (conjunto de las magnitudes de una especie dada, o conjunto de las razones de magnitudes) como *completos* en el sentido que tiene hoy esta palabra, de no ser así no estaría claro

[5] De este modo puede hacerse con todo rigor lo que hacían los primeros matemáticos griegos cuando consideraban como demostrado un teorema sobre las proporciones una vez que éste estaba demostrado para toda razón racional. Parece que antes de Eudoxio se intentó construir una teoría que hubiese alcanzado los mismos fines definiendo la razón A/A' de dos magnitudes por lo que nosotros llamaríamos en lenguaje moderno los términos de la fracción continua que la expresa; acerca de estos intentos, a los que conducía de forma natural el algoritmo llamado «de Euclides» para la búsqueda de una medida común a A y A', si existe (o para la determinación del m.c.d.), cf. [*17* a].

[6] Tan poco manejable que los matemáticos griegos, para traducir a su lenguaje la ciencia algebraica de los babilonios, se habían visto obligados a emplear sistemáticamente un medio de un orden completamente diferente, a saber, la correspondencia entre dos *longitudes* y el *área* del rectángulo construido tomando estas dos longitudes como lados, lo que no es propiamente hablando una ley de composición, y no permite escribir cómodamente las relaciones algebraicas de grado mayor que dos.

Se observará por otra parte que en toda esta exposición hacemos abstracción de la cuestión de los números negativos (véase p. 77).

el porqué de admitir (sin sentir siquiera la necesidad de convertirla en un axioma) la existencia de la cuarta proporcional, y además ciertos textos parecen hacer referencia a ideas de este género; por último, admiten ciertamente como evidente el que una curva, susceptible de ser descrita por un movimiento continuo, no puede pasar de un lado a otro de una recta sin cortarla, principio que emplearon por ejemplo en sus trabajos sobre la duplicación del cubo (construcción de $\sqrt[3]{2}$ mediante intersecciones de curvas), y que es esencialmente equivalente a la propiedad considerada; sin embargo, los textos que poseemos no nos permiten conocer con toda precisión sus ideas sobre este punto.

Tal es pues el estado de la teoría de los números reales en la época clásica de la matemática griega. Por admirable que fuese la construcción de Eudoxio, y hay que reconocer que no deja nada que desear desde el punto de vista del rigor y de la coherencia, hay que confesar que carecía de flexibilidad, y que era muy poco favorable al desarrollo del cálculo numérico, y sobre todo del cálculo algebraico. Además, su necesidad lógica solamente podía resultar clara para espíritus llenos de rigor y adiestrados en la abstracción, y resulta muy natural ver cómo, al declinar la matemática griega, vuelve a surgir poco a poco el punto de vista «intuitivo» que se había conservado en la tradición de los «logísticos»; este punto de vista es por ejemplo el dominante en Diofanto [*91* a], verdadero continuador de esta tradición mucho más que de la ciencia griega oficial. Este, aunque reproduciendo formalmente la definición de Euclides de número, designa en realidad con la palabra «número» la incógnita de problemas algebraicos cuya solución es un entero, o un número fraccionario, o incluso uno irracional[7]. Aunque este cambio de actitud respecto al número vaya ligado a uno de los progresos más importantes de la historia de las matemáticas, a saber, al del desarrollo del álgebra (véase p. 76), no debe considerarse en sí mismo como un avance, sino como un retroceso.

No nos es aquí posible seguir las vicisitudes de la idea de número, a través de las matemáticas india, griega y occidental hasta el final

[7] «*El "número" resulta no racional*», Diofanto, libro IV, prob. IX. Acerca de esta vuelta a la noción «intuitiva» de número, cf. también Eutocio, en su Comentario sobre Arquímedes ([*5* b], t. III, pp. 120-126).

de la Edad Media. Domina la noción «intuitiva» de número, y aunque los Elementos de Euclides fueran la base de la enseñanza de las matemáticas a lo largo de este periodo, es muy verosímil que la doctrina de Eudoxio permaneciese incomprendida mientras no se mostrase su necesidad. Las «razones» de Euclides eran a menudo calificadas de «números», y aplicándoles las reglas del cálculo con los enteros se obtenían resultados exactos, sin intentar analizar a fondo las razones del éxito de estos métodos.

Vemos, sin embargo, como ya R. Bombelli, a mediados del siglo XVI, expone sobre este tema, en su Algebra [*28* b][8], un punto de vista, que, si se dan por supuestos los resultados del libro V de Euclides, es esencialmente correcto. Habiendo observado que, una vez elegida la unidad de longitud, existe una correspondencia biunívoca entre las longitudes y las razones de magnitudes, define diversas operaciones algebraicas *sobre las longitudes* (suponiendo, desde luego, la unidad fija) y, representando los números mediante longitudes, obtiene la definición geométrica del cuerpo de los números reales (punto de vista cuyo mérito se atribuye generalmente a Descartes), proporcionando de este modo al Algebra una sólida base geométrica[9].

Pero el Algebra de Bombelli, aunque singularmente avanzada para su época, no iba más allá de la extracción de radicales y de la resolución mediante radicales de las ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado, y, desde luego, la posibilidad de la extracción de radicales es admitida por él sin discusión. Simon Stévin [*295*] adopta también un punto de vista análogo respecto al número, que es para él aquello mediante lo cual se denota una medida de magnitud, y que considera como esencialmente «continuo» (sin precisar el sentido dado a esta palabra); si bien distingue los «números geométricos» de los «números aritméticos», se trata únicamente de un accidente

[8] Se trata del libro IV de esta Algebra, que ha permanecido inédito hasta nuestros días. Para el objeto de la exposición hecha aquí poco importa que las ideas de Bombelli fuesen o no conocidas de sus contemporáneos.

[9] No entramos aquí en la historia del empleo de los números negativos, que corresponde al Algebra. Señalemos sin embargo que Bombelli, en este mismo lugar, da con una claridad perfecta la definición, puramente formal (tal y como podría encontrarse en un Algebra moderna), no solo de las cantidades negativas, sino también de los números complejos.

relativo al modo de definición, sin que exista por ello ninguna diferencia de naturaleza, ésta es su última palabra sobre el tema: «*Obtenemos, por tanto, la conclusión de que no hay números absurdos, irracionales, irregulares, inexplicables o sordos, sino que hay, por el contrario, en ellos tal excelencia y concordancia que deberíamos meditar día y noche en su admirable perfección*» ([*295*], p. 10). Por otra parte, habiendo sido el primero en hacer de las fracciones decimales un método de cálculo, y habiendo propuesto para éstas una notación bastante cercana a la nuestra, se da claramente cuenta de que estas fracciones proporcionan un algoritmo de aproximación indefinida de todo número real, como se deduce de su *Apéndice algebraico* de 1594 «*conteniendo* (la) *regla general de todas* (las) *Ecuaciones*» (edición cuyo único ejemplar conocido fue quemado en Lovaina en 1914; pero ver [*295*], p. 88). Habiendo escrito una ecuación en la forma $P(x) = Q(x)$ (donde P es un polinomio de mayor grado que Q, y $P(0) < Q(0)$), se sustituye x por los números 10, 100, 1 000,... hasta llegar a $P(x) > Q(x)$, lo que —dice— determina el número de cifras de la raíz, después (si consideramos, por ejemplo, que la raíz tiene dos cifras) se sustituyen por 10, 20,..., lo que determina la cifra de las decenas, lo mismo sucede con la cifra siguiente, y después con las cifras decimales sucesivas: «*Y procediendo indefinidamente de este modo*» —dice— «*se le aproxima indefinidamente tanto como sea necesario*» ([*295*], p. 88). Como vemos, Stévin ha sido, sin duda, el primero en concebir claramente el teorema de Bolzano, y en reconocer este teorema como la herramienta básica para la resolución sistemática de las ecuaciones numéricas, y aparece al mismo tiempo una concepción intuitiva tan clara del continuo numérico que no era necesario demasiado trabajo para precisarla de un modo definitivo.

Sin embargo, el logro definitivo de métodos correctos se vio retardado durante los dos siglos siguientes por el desarrollo de dos teorías, cuya historia no narraremos aquí: el Cálculo infinitesimal y la teoría de series. A lo largo de las discusiones provocadas por ellas podemos distinguir, al igual que en todas las épocas de la historia de las matemáticas, el eterno movimiento pendular entre los investigadores preocupados por avanzar, aunque a costa de cierta inseguridad, persuadidos de que siempre será posible después consolidar el terreno conquistado, y los espíritus críticos, que, sin ser necesariamente inferiores a los primeros en lo que a la facultad de intuición y al talento

de invención se refiere, no consideran inútil dedicar algunos esfuerzos a la expresión precisa y a la justificación rigurosa de sus concepciones. Durante el siglo XVII el principal objeto de discusión es la noción de infinitamente pequeño, que, justificada *a posteriori* por los resultados que permitía alcanzar, parecía estar en abierta contradicción con el axioma de Arquímedes; vemos cómo las mentes más luminosas de la época acaban por adoptar un punto de vista poco diferente del de Bombelli, del que se distingue sobre todo por la mayor atención que dedica a los métodos rigurosos de los antiguos. Isaac Barrow, maestro de Newton, que tuvo un papel importante en la creación del Cálculo infinitesimal, lo expone brillantemente en sus *Lecciones de Matemática* profesadas en Cambridge en 1664-65-66 [*16* a y *b*]; reconociendo la necesidad, para volver a encontrar a propósito del número la proverbial «certeza geométrica», de volver a la teoría de Eudoxio, y defiende extensa y muy razonablemente esta teoría (que, según su testimonio, resultaba ininteligible para muchos de sus contemporáneos) contra todos aquellos que la tachaban de oscura e incluso de absurda. Por otra parte, al definir los números como los símbolos que designan las razones de magnitudes, susceptibles de combinarse entre ellos por medio de las operaciones de la aritmética, obtiene el cuerpo de los números reales en términos que después recogerá Newton en su *Aritmética* y que no serían modificados en nada por sus sucesores hasta Dedekind y Cantor.

Pero es también hacia esta misma época cuando se introduce el método de los desarrollos en serie, que tomaría muy pronto, en manos de algebristas impenitentes, un carácter exclusivamente formal y aleja la atención de los matemáticos de las cuestiones de convergencia que plantea el sano empleo de las series en el dominio de los números reales. Newton, principal creador del método, era, por lo menos, consciente de la necesidad de considerar estas cuestiones, y si bien no las había dilucidado suficientemente, había reconocido al menos que las series de potencias introducidas por él convergían «casi siempre» tan bien por lo menos como una serie geométrica (cuya convergencia ya era conocida por los antiguos) para valores pequeños de la variable ([*233* a], t. I, pp. 3-26). En esta misma época, Leibniz había observado que una serie alternada de términos decrecientes en valor absoluto y tendiendo a 0 es convergente; en el siglo siguiente, d'Alembert, en 1768, expresa ciertas dudas sobre el uso de series no

convergentes. Pero la autoridad de los Bernoulli, y sobre todo la de Euler, hizo que tales dudas fuesen excepcionales en esta época.

Es evidente que matemáticos que acostumbrasen emplear series en el Cálculo numérico no hubiesen desatendido de este modo la noción de convergencia, y no es ciertamente una casualidad que el primero que, en este dominio como en otros muchos, volviese a los métodos correctos, fuese un matemático enamorado desde su primera juventud del Cálculo numérico: C. F. Gauss, que, siendo casi un niño, había practicado el algoritmo de la media aritmético-geométrica[10], no podía dejar de tener una idea clara de la noción de límite, y le vemos, en un fragmento que data de 1800 (pero que no ha sido publicado hasta nuestros días) ([*124* a], t. X_1, p. 390), definir con precisión por una parte el extremo superior y el extremo inferior, y por otra el límite superior y el límite inferior de una sucesión de números reales; la existencia de los primeros (para una sucesión acotada) parecía admitirse como evidente, y los últimos estaban correctamente definidos como los límites, para n tendiente a $+\infty$, de $\sup_{p\geqslant 0} u_{n+p}$, $\inf_{p\geqslant 0} u_{n+p}$. Además, Gauss nos da también, en su memoria de 1812 sobre la serie hipergeométrica ([*124* a], t. III, p. 139), el primer modelo de una discusión de convergencia, realizada, como él mismo dice: «*con todo rigor, y hecha para satisfacer a aquéllos cuyas preferencias se dirigen a los métodos rigurosos de los geómetras antiguos*». Es cierto, sin embargo, que esta discusión, que constituía un punto secundario de la memoria, no se remonta a los primeros principios de la teoría de series; Cauchy es el primero en establecerlos, en su *Curso de Análisis*, de 1821 ([*56* a] (2), t. III), de una manera completamente correcta, a partir del criterio de Cauchy claramente enunciado y admitido como evidente; si tenemos en cuenta que, en lo que a la definición de número se refiere, se atiene a los puntos de vista de Barrow y Newton, podemos decir que para él los números reales están definidos por los axiomas de las magnitudes y el criterio de Cauchy (lo que en efecto es suficiente para definirlos).

Simultáneamente se aclara de modo definitivo otro aspecto impor-

[10] Dados x_0, $y_0 > 0$, sean $x_{n+1} = (x_n + y_n)/2$, $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$; para n tendiendo hacia $+\infty$, x_n e y_n tienden (muy rápidamente) hacia un límite común, llamado media aritmético-geométrica de x_0 e y_0; esta función está íntimamente ligada a las funciones elípticas y fue el punto de partida de los importantes trabajos de Gauss sobre el tema.

tante de la teoría de los números reales. Como hemos dicho ya, se había admitido siempre como geométricamente evidente que dos curvas continuas no pueden atravesarse sin cortarse, principio que (precisando convenientemente) sería también equivalente a la propiedad de la recta de ser un espacio completo. Este principio está, además, en la base de la demostración «rigurosa», dada por Gauss, en 1799, del teorema de d'Alembert, según el cual todo polinomio con coeficientes reales admite una raíz real o compleja ([*124* a], t. III, p. 1); la demostración del mismo teorema dada por Gauss en 1815 ([*124* a], t. III, p. 31) se apoya, al igual que un intento anterior de Lagrange, en el principio, análogo pero más sencillo, según el cual un polinomio no puede cambiar de signo sin anularse (principio que ya hemos visto utilizar a Stévin). Bolzano da, en 1817, una demostración completa de este último principio a partir del criterio de Cauchy, obteniéndolo como caso particular del teorema análogo para las funciones reales continuas de una variable real [*27* c]. Enunciando claramente (antes de Cauchy) el «criterio de Cauchy», intenta justificarlo mediante un razonamiento que, a falta de toda definición aritmética del número real, no era (y no podía ser) otra cosa que un círculo vicioso; pero una vez aceptado lo anterior, su trabajo es totalmente correcto y muy notable, en tanto que contiene, no solamente la definición moderna de función continua (dada aquí por primera vez) con la demostración de la continuidad de los polinomios, sino también la demostración de la existencia del extremo inferior de un conjunto acotado *cualquiera* de números reales (no se habla de conjuntos, sino de propiedades de los números reales, lo que viene a ser lo mismo). Por otra parte, Cauchy, en su Curso de Análisis ([*56* a] (2), t. III), al definir también él las funciones continuas de una o varias variables reales, demuestra igualmente que una función continua de una variable no puede cambiar de signo sin anularse, empleando el mismo razonamiento que Simon Stévin, razonamiento, que, una vez definida la continuidad, resulta naturalmente correcto una vez que se emplea el criterio de Cauchy (o bien una vez que se admite, como hace Cauchy en este punto, el principio equivalente denominado de los «segmentos encajados», del que la convergencia de las fracciones decimales indefinidas es solo un caso particular).

Una vez llegados a este punto, a los matemáticos solamente les faltaba precisar y desarrollar los resultados que ya poseían, corrigiendo algunos errores y llenando algunas lagunas. Por ejemplo, Cauchy creyó por un momento que la suma de una serie convergente cuyos términos son funciones continuas de una variable es también una función continua; la rectificación de esta afirmación por Abel en sus importantes trabajos sobre las series ([*1*], t. I, p. 219; cf. también t. II, p. 257 y *passim*), dio finalmente lugar a la aclaración por Weierstrass en sus cursos (inéditos, pero que tuvieron una influencia considerable) de la noción de convergencia uniforme (ver p. 282). Por otro lado, Cauchy había admitido, sin justificación suficiente, la existencia del mínimo de una función continua en una de las demostraciones que dio de la existencia de las raíces de un polinomio; también fue Weiertrass el encargado de aclarar estas cuestiones, demostrando en sus cursos la existencia del mínimo para las funciones de variables reales, definidas en intervalos cerrados y acotados; como consecuencia de su crítica de la aplicación injustificada de este teorema a conjuntos de funciones (cuyo ejemplo más conocido es el «principio de Dirichlet») surge el movimiento de ideas que culminará (ver p. 197) con la definición general de los espacios compactos y el enunciado moderno del teorema.

Al mismo tiempo, Weierstrass había puesto de manifiesto en sus cursos el interés lógico existente en separar completamente la idea de número real de la teoría de las magnitudes; en efecto, el empleo de ésta viene a reducirse a definir axiomáticamente el conjunto de puntos de la recta (en definitiva, el conjunto de los números reales) y a admitir la existencia de este conjunto; aunque esta forma de proceder sea esencialmente correcta, era preferible evidentemente partir únicamente de los números racionales, y deducir a partir de ellos los números reales por «complección»[11]. Esto es lo que hicieron, siguiendo métodos diversos, e independientemente unos de otros,

[11] En efecto, de este modo se reduce la cuestión de la existencia, es decir, en lenguaje moderno, la no contradicción de la teoría de los números reales, a la cuestión análoga para los números racionales, *con la condición sin embargo de dar por supuesta la teoría de los conjuntos abstractos* (puesto que la complección supone la noción de parte genérica de un conjunto infinito); dicho de otro modo, se reduce todo a esta última teoría, puesto que la teoría de los números racionales puede obtenerse a partir de ella. Por el contrario, si no se supone que se dispone de la Teoría de conjuntos, resulta imposible reducir la no contradicción de la teoría de los números reales a la de la aritmética, y vuelve a ser necesario dar una caracterización axiomática independiente de ella.

Weierstrass, Dedekind, Méray y Cantor; en tanto que el procedimiento de las «cortaduras», propuesto por Dedekind ([*79*], t. II, pp. 315-334) estaba muy próximo a las definiciones de Eudoxio, los demás métodos propuestos se acercan mucho más al método empleado más tarde por Hausdorff para completar un espacio métrico. Es, también, en este momento, cuando Cantor comienza a desarrollar la teoría de los conjuntos de números reales, cuya primera idea procedía de Dedekind [*48*], obteniendo de este modo los resultados elementales acerca de la topología de la recta, la estructura de los conjuntos abiertos y de los cerrados, las nociones de conjunto derivado, de conjunto perfecto totalmente discontinuo, etc.

Con Cantor la teoría de los números reales toma poco más o menos su forma definitiva; indicaremos ahora brevemente en qué sentido ha sido prolongada. Dejando aparte los trabajos de Topología general (ver p. 197) y algunas aplicaciones a la integración (ver p. 304) se trata fundamentalmente de investigaciones sobre la estructura y la clasificación de los conjuntos de puntos sobre la recta y de las funciones reales de variables reales. Su origen se halla en los trabajos de Borel [*32* a], orientados fundamentalmente hacia la teoría de la medida, pero que dan lugar, entre otras, a la definición de los «conjuntos borelianos»: se trata de los conjuntos que pertenecen a la familia más pequeña de partes de **R** que contiene a los intervalos y que es cerrada respecto a la unión y a la intersección *numerables* y a la operación $\complement$. Intimamente relacionadas con estos conjuntos están las llamadas «funciones de Baire», es decir, aquellas funciones que pueden obtenerse a partir de funciones continuas mediante la operación de tomar límite de sucesión iterada «transfinitamente». Dichas funciones fueron definidas por Baire a lo largo de importantes trabajos en los que abandona por completo el punto de vista de la medida para abordar sistemáticamente el aspecto cualitativo y «topológico» de estas cuestiones [*11* a]: con este motivo es el primero en definir y estudiar las funciones semicontinuas, y donde, con vistas a caracterizar las funciones que son límites de funciones continuas, introduce la importante noción de conjunto magro (conjunto «de primera categoría» en la terminología de Baire) (ver p. 226). En cuanto a los numerosos trabajos que han continuado los de Baire, debidos sobre todo a las escuelas rusa y sobre todo polaca, solamente podemos aquí señalar su existencia (ver p. 226).

EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

La historia de la teoría del grupo multiplicativo $\mathbf{R}_+^*$ de los números reales > 0 está estrechamente ligada a la del desarrollo de la noción de *potencias* de un número > 0, y a la de las notaciones empleadas para designarlas. La concepción de la «progresión geométrica» formada por las potencias sucesivas de un mismo número se remonta a los egipcios y a los babilonios, y era familiar a los matemáticos griegos; en Euclides encontramos ya (*Elementos*, Libro IX, Prop. 11) un enunciado general equivalente a la regla $a^m a^n = a^{m+n}$ para exponentes enteros > 0. En la Edad Media, el matemático francés N. Oresme (siglo XIV) vuelve a encontrar esta regla, en él aparece también por vez primera la noción de exponente fraccionario > 0, con una notación ya próxima a la nuestra, y también algunas reglas de cálculo (enunciadas de forma general) referentes a ellas (por ejemplo, las dos reglas que nosotros escribimos ahora $(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$, $(a^m)^{p/q} = (a^{mp})^{1/q}$ [*74*]). Pero las ideas de Oresme eran demasiado avanzadas respecto a la matemática de su época como para poder ejercer una influencia sobre sus contemporáneos, y su tratado cayó rápidamente en el olvido. Un siglo más tarde, N. Chuquet enunció nuevamente la regla de Euclides, introduciendo además una notación exponencial para las potencias de las incógnitas de las ecuaciones, y no duda en emplear el exponente 0 y exponentes en-

teros $< 0^1$. Esta vez (y aunque la obra de Chuquet no pasase del manuscrito y no parezca haberse extendido mucho) ya no se perderá de vista la idea de isomorfismo entre la «progresión aritmética» de los exponentes y la «progresión geométrica» de las potencias; extendida a los exponentes negativos y a los fraccionarios por Stifel ([*298*], folio 35 y pp. 249-250), culmina finalmente con la definición de los logaritmos y la construcción de las primeras tablas, emprendida independientemente por el escocés J. Neper, en 1614-1620, y el suizo J. Bürgi (cuya obra no apareció hasta 1620, aunque su concepción se remontase a los primeros años del siglo). En Bürgi, la continuidad del isomorfismo establecido entre $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R}_+^*$ se da implícitamente por supuesta al emplear la interpolación en el manejo de las tablas; por el contrario, en la definición de Neper se formula explícitamente (al menos, todo lo explícitamente que lo permitía la vaguedad de la idea que se tenía de la continuidad en esta época)[2].

No vamos a insistir aquí sobre la utilidad de los logaritmos en el cálculo numérico; desde el punto de vista teórico, su importancia data, sobre todo, de los comienzos del Cálculo infinitesimal, con el descubrimiento de los desarrollos en serie de $\log(1 + x)$ y de e^x, y de las propiedades diferenciales de estas funciones (ver pp. 235-236). En lo que se refiere a la definición de las exponenciales y de los logaritmos, todo lo que se hizo hasta mediados del siglo XIX fue admitir intuitivamente la posibilidad de prolongar por continuidad al conjunto de los números reales la función a^x definida para todo x racional, y solo una vez que la noción de número real fue obtenida a partir de la de número racional y precisada definitivamente se pensó en en dar una justificación rigurosa de esta prolongación.

[1] Chuquet escribe por ejemplo 12^1, 12^2, 12^3, etc., para $12x$, $12x^2$, $12x^3$, etc., 12^0 para el número 12, y $12^{2\bar{m}}$ para $12x^{-2}$ ([*64*], pp. 737-738).

[2] Neper considera dos puntos M y N moviéndose simultáneamente sobre dos rectas, siendo el movimiento de M uniforme, y siendo el de N tal que la velocidad de N sea proporcional a su abscisa; la abscisa de M es entonces por definición el logaritmo de la de N ([*230* a], p. 3).

ESPACIOS DE *n* DIMENSIONES

Ya hemos tenido ocasión de indicar cómo el desarrollo de la Geometría analítica del plano y del espacio condujo a los matemáticos a introducir la noción de espacio de *n* dimensiones, que les proporcionaba un lenguaje geométrico extraordinariamente cómodo para expresar de forma concisa y simple los teoremas de álgebra referentes a las ecuaciones con un número cualquiera de variables, y, sobre todo, los resultados generales del Algebra lineal (ver pp. 92-93). Pero si bien hacia mediados del siglo XIX este lenguaje era ya corriente en muchos geómetras, seguía siendo puramente convencional, y la ausencia de una representación «intuitiva» de los espacios de más de tres dimensiones parecía prohibir en estos últimos los razonamientos «por continuidad» que se permitían en el plano o en el espacio apoyándose únicamente en la «intuición». Riemann fue el primero que, en sus trabajos sobre el *Analysis situs* y los fundamentos de la Geometría, se atrevió a razonar por analogía de esta forma en el caso del espacio de tres dimensiones (ver p. 193)[1]; después de él, numerosos matemáticos se pusieron a emplear con gran éxito razonamientos de esta naturaleza, fundamentalmente en la teoría

[1] Véanse también los trabajos de L. Schläfli ([*273*], t. I, pp. 169-387), datando de la misma época, pero que no fueron publicados hasta el siglo XX.

de las funciones algebraicas de varias variables complejas. Pero siendo entonces muy limitado el control de la intuición espacial, había motivos para mostrarse escéptico en cuanto al valor demostrativo de este tipo de consideraciones, y a admitirlas únicamente a título puramente heurístico, en tanto que hacían plausible la certeza de ciertos teoremas. De este modo, H. Poincaré, en su memoria de 1887 sobre los residuos de las integrales dobles de las funciones de dos variables complejas, evita siempre que puede todo empleo de la intuición en el espacio de cuatro dimensiones: «*Como este lenguaje hipergeométrico repugna todavía a muchos espíritus selectos*» —dice— «*haré de él un uso muy poco frecuente*», los «artificios» que emplea con este fin le permiten limitarse a razonamientos topológicos en el espacio de tres dimensiones, en el que no duda ya en hacer uso de la intuición ([*251* a], t. III, p. 443 y ss.).

Además, los descubrimientos de Cantor, y sobre todo el célebre teorema que establecía la equipotencia de $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R}^n$ (que parecía poner en cuestión la misma noción de dimensión)[2], mostraban que para fundamentar sobre una base sólida los razonamientos de la Geometría y de la Topología era necesario liberarlos de todo empleo de la intuición. Hemos indicado ya (ver p. 192) que esta necesidad interviene en el origen de la concepción moderna de la Topología general, pero incluso antes de la creación de esta última se había comenzado a estudiar de forma rigurosa la Topología de los espacios numéricos y de sus generalizaciones más inmediatas (las «variedades de dimensión *n*») empleando métodos procedentes sobre todo de la rama de la Topología llamada «Topología combinatoria», o mejor aún, «Topología algebraica», de la que no podemos hablar aquí.

[2] Es interesante observar que desde el momento en que tuvo conocimiento de este resultado, Dedekind había comprendido la razón de su apariencia tan paradójica, y había señalado a Cantor que debería poder demostrar la imposibilidad de una correspondencia *biunívoca y bicontinua* entre $\mathbf{R}^m$ y $\mathbf{R}^n$ para $m \neq n$ ([*48*], pp. 37-38).

NUMEROS COMPLEJOS. MEDIDA DE LOS ANGULOS

No volveremos a hacer aquí la exposición completa del desarrollo histórico de la teoría de los números complejos o de la de los cuaterniones, puesto que estas teorías corresponden esencialmente al Algebra (ver pp. 104-105 y 92-93), pero diremos algunas palabras acerca de la representación geométrica de los imaginarios, que constituye, desde muchos puntos de vista, un progreso decisivo en la historia de las Matemáticas.

A C. F. Gauss se debe, sin duda, la primera concepción clara de la correspondencia biunívoca entre los números complejos y los puntos del plano[1], y, sobre todo, el mérito de haber sido el primero en saber aplicar esta idea a la teoría de los números complejos, y de haber visto claramente todo el partido que iban a obtener de ella los analistas del siglo XIX. A lo largo de los siglos XVII y XVIII, los matemáticos habían ido llegando poco a poco a la convicción de que los números imaginarios, que permitían resolver las ecuaciones de segundo grado, permitirían resolver también ecuaciones de cualquier grado. Durante el siglo XVIII se habían publicado numerosos intentos de demostra-

[1] El primero en tener una idea de una correspondencia semejante fue sin duda Wallis, en su Tratado de Algebra publicado en 1685, pero sus ideas sobre este punto permanecieron confusas, y no ejercieron influencia sobre sus contemporáneos.

ción de este teorema, pero, sin mencionar siquiera a aquellos que se apoyaban en un círculo vicioso, no había ninguna a la que no se pudiese poner objecciones serias. Gauss, después de un examen detallado de estos intentos, y de una crítica rigurosa de sus lagunas, se propone en su Disertación inaugural (escrita en 1797 y publicada en 1799) dar por fin una demostración rigurosa; recogiendo una idea indicada de paso por d'Alembert (en la demostración publicada por este último en 1746[2]), señala que los puntos (a, b) del plano tales que $a + ib$ sea raíz del polinomio $P(x + iy) = X(x, y) + i\,Y(x, y)$ son las intersecciones de las curvas $X = 0$ e $Y = 0$; por medio de un estudio cualitativo de estas curvas muestra que un arco continuo de una de ellas une puntos de dos regiones distintas limitadas por la otra, y a partir de aquí concluye que dichas curvas se cortan ([*124* a], t. III, p. 3; ver también [*124* b]). Esta demostración, que constituye por su claridad y originalidad un progreso considerable con respecto a los intentos anteriores, es, sin duda, uno de los primeros ejemplos de un razonamiento de Topología pura aplicado a un problema de Algebra[3].

En su Disertación, Gauss no define explícitamente la correspondencia entre puntos del plano y números imaginarios; incluso adopta, respecto a estos últimos y a las cuestiones de «existencia» que venían plateando desde hacía dos siglos, una postura bastante reservada, presentando intencionadamente todos sus razonamientos en una forma en la que solamente aparecen cantidades reales. Pero la marcha de las ideas de su demostración sería totalmente ininteligible si no presupusiera una identificación plenamente consciente de los puntos del plano y de los números complejos, y sus trabajos de la

[2] Esta demostración (en la que además d'Alembert no saca ningún partido de la observación que le sirve a Gauss de punto de partida) es cronológicamente la primera que no se reduce a una grosera petición de principios. Gauss, que critica con justicia sus puntos débiles, no deja de reconocer sin embargo el valor de la idea fundamental de d'Alembert: «*el verdadero nervio de la demostración*», dice, «*no me parece afectado por todas estas objeciones*» ([*124* a], t. III, p. 11); un poco más lejos, esboza un método para hacer riguroso el razonamiento de d'Alembert, que es ya, poco más o menos, el razonamiento de Cauchy en una de sus demostraciones del mismo teorema.

[3] Gauss publicó en total cuatro demostraciones del «teorema de d'Alembert-Gauss»; la última es una variante de la primera, y, como ésta, hace referencia a propiedades topológicas intuitivas del plano, pero la segunda y la tercera se basan en principios completamente diferentes (véase p. 129).

misma época sobre la teoría de números y las funciones elípticas, en los que también aparecen números complejos, no hacen más que reforzar esta hipótesis. Hasta qué punto le resultaba familiar la concepción geométrica de los imaginarios, y a qué resultados podía dar lugar entre sus manos, es algo que se muestra claramente en las notas (no publicadas hasta nuestros días) en las que aplica los números complejos a la resolución de problemas de Geometría elemental ([*124* a], t. IV, p. 396 y t. VIII, p. 307). Más explícita todavía es la carta de 1811 a Bessel ([*124* a], t. VIII, pp. 90-91), en la que esboza lo esencial de la teoría de la integración de las funciones de variable compleja: «*Del mismo modo*» —dice— «*que puede representarse todo el dominio de las cantidades reales por medio de una línea recta indefinida, puede uno figurarse* («sinnlich machen») *el dominio* completo *de* todas *las cantidades, las reales y las imaginarias, por medio de un plano indefinido, en el que cada punto, determinado por su abscisa* a *y su ordenada* b, *representa a la vez la cantidad* a + ib. *El paso continuo de un valor de* x *a otro se efectúa por consiguiente siguiendo una línea, y puede efectuarse, por tanto, de infinitas maneras...*»

Pero hasta 1831 no expone públicamente Gauss (a propósito de la introducción de los «números de Gauss» $a + ib$, siendo a y b enteros) sus ideas sobre este punto de una manera tan clara ([*124* a], t. II, *Theoria Residuorum Biquadraticorum, Commentatio secunda*, art. 38, p. 109, y *Anzeige*, pp. 174 y ss.). En este intervalo, la idea de la representación geométrica de los imaginarios había sido reencontrada independientemente por dos modestos investigadores, los dos matemáticos aficionados, más o menos autodidactas, y de los que constituyó la única contribución a la ciencia, ninguno de los dos tenía tampoco mucho contacto con los medios científicos de su tiempo. Debido a esto, sus trabajos corrían el riesgo de pasar totalmente desapercibidos, esto es precisamente lo que sucedió con el primero en el tiempo, el danés C. Wessel, cuyo opúsculo, aparecido en 1798, y concebido y redactado con mucha claridad, no fue sacado del olvido hasta un siglo después; la misma desgracia estuvo a punto de sucederle al segundo, el suizo J. Argand, que debió a la suerte el ver exhumar, en 1813, la obra que había publicado siete años antes[4]. Esta obra

[4] Al revés que Gauss, Wessel y Argand se preocupan más de *justificar* los cálculos con los números complejos que de emplear para nuevos trabajos la representación

provocó una viva discusión en los *Annales de Gergonne*, y la cuestión fue objeto, en Francia e Inglaterra, de numerosas publicaciones (debidas a autores bastante oscuros) entre 1820 y 1830, pero faltaba la autoridad de un gran nombre para poner fin a estas controversias y hacer aceptar a los matemáticos el nuevo punto de vista, y fue necesario esperar hasta mediados de siglo para que se adoptase universalmente la representación geométrica de los imaginarios, después de las publicaciones de Gauss (citadas anteriormente) en Alemania, de los trabajos de Hamilton y Cayley sobre los sistemas hipercomplejos en Inglaterra, y finalmente, en Francia, de la adhesión de Cauchy [5], solamente algunos años antes de que Riemann, con una extensión genial, ampliase todavía más el papel de la Geometría en la teoría de las funciones analíticas, creando a la vez la Topología.

La medida de los ángulos a partir de los arcos que cortan en una circunferencia es tan antigua como la misma noción de ángulo, y era ya conocida por los babilonios, cuya unidad de ángulo, el grado, hemos conservado. Por otra parte, sus medidas de ángulos estaban comprendidas entre 0 y 360°, lo que les resultaba suficiente, puesto que los ángulos les servían fundamentalmente para fijar las posiciones de objetos celestes en puntos determinados de sus trayectorias aparentes, y para la construcción de tablas con fines científicos o astrológicos.

En los geómetras griegos de la época clásica, la definición de ángulo (*Eucl. El.*, I, def. 8 y 9) es todavía más restringida, puesto que se aplica solamente a los ángulos inferiores a dos rectos, y como por otra parte su teoría de las razones y de la medición se apoyaba en la comparación de múltiplos arbitrariamente grandes de las magnitudes mensurables, los ángulos no podían ser para ellos una magnitud mensurable, aunque aparezcan de modo natural las nociones de ángulos

geométrica que proponen. Wessel no indica ninguna aplicación, y la única que les da Argand es una demostración del teorema de d'Alembert-Gauss, que no es más que una variante de la demostración de d'Alembert, y que se presta a las mismas objeciones.

[5] En sus primeros trabajos sobre las integrales de las funciones de variables complejas (entre 1814 y 1826), Cauchy considera los números complejos como expresiones «simbólicas» y no los identifica con los puntos del plano, lo que no le impide asociar constantemente al número $x + iy$ el punto (x, y) y utilizar libremente con este motivo el lenguaje de la geometría.

iguales, de ángulos mayores o menores que otro, y de suma de dos ángulos cuando esta suma no es superior a dos rectos. Al igual que la adición de fracciones, la medida de los ángulos debió constituir a sus ojos un procedimiento empírico sin valor científico. Este punto de vista queda bien ilustrado por la admirable memoria de Arquímedes sobre las espirales ([*5* b], t. II, pp. 1-121), en la que, a falta de poder definirlas por medio de la proporcionalidad entre el radio vector y el ángulo, da de ellas una definición cinemática (def. 1, p. 44; cf. el enunciado de la Prop. 12, p. 46), a partir de la cual consigue obtener, como lo muestra la continuación de su obra, todos los resultados que le hubiese proporcionado la noción general de medida de ángulos si la hubiese poseído. En lo que se refiere a los astrónomos griegos, parece que en este punto, como en muchos otros, se contentaron con seguir a sus predecesores babilonios.

También aquí, como en la evolución del concepto de número real (cf. p. 207), el debilitamiento del espíritu de rigor a lo largo de la decadencia de la ciencia griega, trajo consigo la vuelta del punto de vista «intuitivo», que se acerca más en ciertos aspectos al nuestro que la rígida concepción euclídea. Es así como un interpolador mal informado inserta en Euclides la famosa proposición (*Eucl. El.*, t. VI, p. 33): «Los ángulos son proporcionales a los arcos que cortan sobre una circunferencia» [6], y un escoliasta anónimo que comenta la «demostración» de esta proposición no duda en introducir, desde luego, sin ninguna justificación, arcos iguales a múltiplos arbitrariamente grandes de una circunferencia y los ángulos correspondientes a dichos arcos ([*107*], t. V, p. 357). Pero el mismo Viète, en el siglo XVI, aun pareciendo aproximarse a nuestra concepción moderna de ángulo cuando descubre que la ecuación sen nx = sen α tiene varias raíces, obtiene solamente las raíces correspondientes a ángulos inferiores a dos rectos ([*319*], pp. 305-313). Hasta el siglo XVII

[6] Que se trata de una interpolación es algo que queda completamente fuera de duda por lo absurdo de la demostración, torpemente calcada sobre los paradigmas clásicos del método de Eudoxio; está claro por otra parte que este resultado no tiene nada que hacer al final del Libro VI. Resulta chocante ver a Theón, en el siglo IV de nuestra era, presumir cándidamente de haber insertado sobre esta interpolación otra en la que pretende probar que «las áreas de los sectores de un círculo son proporcionales a sus ángulos en el centro» ([*107*], t. V p. 24), y todo esto seis siglos después de la determinación por Arquímedes del área de los sectores de las espirales.

no se supera este punto de vista de un modo definitivo; y después de que el descubrimiento por Newton de los desarrollos en serie de sen x y cos x hubiese proporcionado expresiones de estas funciones válidas para todos los valores de la variable, encontramos finalmente en Euler, a propósito de los logaritmos de los números «imaginarios», la concepción precisa de la noción de medida de un ángulo cualquiera ([*108* a] (1), t. XVII, p. 220).

Naturalmente, la definición clásica de la medida de un ángulo a partir de la longitud de un arco de círculo no solamente es intuitiva, sino que es esencialmente correcta; exige, sin embargo, para llegar a ser rigurosa, la noción de longitud de una curva, es decir, el Cálculo integral. Desde el punto de vista de las estructuras que entran en juego se trata de un procedimiento bastante complicado, y es posible no emplear otros medios que los de la teoría de los grupos topológicos, de este modo la exponencial real y la exponencial compleja aparecen como procedentes de una misma fuente, el teorema que caracteriza los «grupos uniparamétricos».

ESPACIOS METRICOS

Como hemos dicho ya (véase p. 200) la noción de espacio métrico fue introducida en 1906 por M. Fréchet, y fue desarrollada algunos años después por F. Hausdorff en su «Mengenlehre». Dicha noción alcanzó una gran importancia después de 1920, como consecuencia por una parte de los trabajos fundamentales de S. Banach y su escuela sobre los espacios normados y sus aplicaciones al Análisis funcional (véase pp. 297-298), y del interés que presenta la noción de valor absoluto en Aritmética y en Geometría algebraica (en la que sobre todo la complección respecto a un valor absoluto ha resultado especialmente fecunda).

Del periodo 1920-1930 datan una serie de estudios realizados por la escuela de Moscú sobre las propiedades de la topología de un espacio métrico, trabajos que intentan en particular obtener condiciones necesarias y suficientes para que una topología dada sea metrizable. Esta corriente de ideas puso de manifiesto el interés de la noción de espacio normal, definida en 1923 por Tietze, pero cuya importancia solo fue reconocida después de los trabajos de Urysohn [*314*] sobre la prolongación de las funciones reales continuas. Dejando aparte el caso trivial de las funciones de una variable real, el problema de la extensión a todo el espacio de una función real continua definida en un conjunto cerrado había sido tratado

por primera vez (en el caso del plano) por H. Lebesgue [*196* d], y antes del resultado definitivo de Urysohn había sido resuelto para los espacios métricos por H. Tietze [*307*]. La extensión de este problema al caso de funciones con valores en un espacio topológico cualquiera ha tomado durante estos últimos años una importancia considerable en Topología algebraica. Por otra parte, los trabajos recientes han puesto de manifiesto que, en este tipo de cuestiones, la noción de espacio normal es poco manejable, puesto que todavía ofrece demasiadas posibilidades «patológicas», y casi siempre debe ser sustituida por la noción más restrictiva de espacio paracompacto, introducida en 1944 por J. Dieudonné [*90* a]; el resultado más importante de esta teoría es el teorema, debido a A. H. Stone [*300*], según el cual todo espacio metrizable es paracompacto[1].

Ya hemos señalado (véase p. 214) los importantes trabajos de finales del siglo XIX y principios del XX (E. Borel, Baire, Lebesgue, Osgood, W. H. Young) sobre la clasificación de los conjuntos de puntos en los espacios $\mathbf{R}^n$, y sobre la clasificación y caracterización de las funciones obtenidas iterando, a partir de las funciones continuas, el proceso de paso al límite (para sucesiones de funciones). Se advirtió rápidamente que los espacios métricos proporcionaban un marco natural para los trabajos de esta naturaleza, cuyo desarrollo después de 1910 se debe sobre todo a las escuelas rusa y polaca. Fueron estas escuelas las que pusieron de manifiesto, entre otros, el papel fundamental desempeñado en el análisis moderno por la noción de conjunto de primera categoría, y por el teorema sobre la intersección numerable de conjuntos abiertos densos en un espacio métrico completo, demostrado primero (de modo independiente) por Osgood [*240*] para la recta numérica y por Baire [*11* b] para los espacios $\mathbf{R}^n$.

Por otra parte, Souslin [*289*] en 1917, al corregir un error de Lebesgue, mostraba que la imagen continua de un conjunto boreliano no es necesariamente un conjunto boreliano, lo que le condujo a

[1] Este teorema ha permitido dar al problema de la metrización una solución más satisfactoria que los criterios obtenidos hacia 1930 por la escuela ruso-polaca («criterio de Nagata-Smirnov»). Pero debemos hacer la observación de que hasta ahora estos criterios no han tenido demasiadas aplicaciones; como tantas veces en la historia de las matemáticas, parece que el problema de la metrización ha tenido menos importancia por su solución que por las nuevas nociones que habría contribuido a desarrollar.

la definición y al estudio de una categoría más amplia de conjuntos, que se llamarían después «analíticos» o «souslinianos»; después de la muerte prematura de Souslin, este estudio fue continuado principalmente por N. Lusin (cuyas ideas habían inspirado el trabajo de Souslin) y por los matemáticos polacos (véase [*209*] y [*189* b]).

La importancia actual de estos conjuntos reside sobre todo en sus aplicaciones a la teoría de la integración (donde, gracias a sus propiedades especiales, permiten construcciones que resultarían imposibles para conjuntos medibles cualesquiera), y a la moderna teoría del potencial, en la que el teorema fundamental sobre la capacitabilidad de los conjuntos souslinianos, demostrado muy recientemente por G. Choquet [*63*], ha revelado ya su riqueza en aplicaciones diversas.

CALCULO INFINITESIMAL

En 1604, en el apogeo de su carrera científica, Galileo cree demostrar que en un movimiento rectilíneo en el que la velocidad crece proporcionalmente al camino recorrido, la ley del movimiento será la misma ($x = ct^2$) que ha descubierto para la caída de los graves ([*122* b], t. X, pp. 115-116). Entre 1695 y 1700 no hay un solo volumen de las *Acta Eruditorum*, publicadas mensualmente en Leipzig, en el que no aparezcan memorias de Leibniz, de los hermanos Bernoulli, y del marqués de L'Hôpital tratando, más o menos con las notaciones que empleamos hoy, los problemas más variados del cálculo diferencial, del cálculo integral, y del cálculo de variaciones. Así pues, el cálculo infinitesimal, o, como han terminado por decir los ingleses, el Cálculo por excelencia («calculus»), se ha forjado casi exactamente en el intervalo de un siglo, y casi tres siglos de desgaste permanente no han conseguido agotar por completo este instrumento incomparable.

Los griegos no poseyeron ni imaginaron nada parecido. Si bien conocieron, sin duda, aunque no fuese más que para negarse a emplearlo, un cálculo algebraico, el de los babilonios, del que tal vez una parte de su Geometría es solamente una transcripción, su creación matemática probablemente más genial, su método para tratar los problemas de nuestro cálculo integral, se inscribe estricta-

mente en el dominio de la invención geométrica. Eudoxio, al tratar del volumen del cono y del de la pirámide, había dado los primeros modelos de él, que Euclides nos ha trasmitido más o menos fielmente ([*107*], Libro XII, prop. 7 y 10). Pero, sobre todo, debemos tener en cuenta que es a estos problemas a los que está consagrada casi toda la obra de Arquímedes [*5* b y c], y, que por una singular fortuna, podemos leer incluso en su texto original, en el sonoro dialecto dorio en que los había redactado cuidadosamente, la mayor parte de sus escritos, e incluso el recientemente encontrado en el que expone los procedimientos «heurísticos» que le llevaron a algunos de sus resultados más bellos ([*5* b], t. II, pp. 425-507). Este es precisamente uno de los inconvenientes del «método exhaustivo» de Eudoxio, el de que siendo un método de demostración irreprochable (una vez admitidos ciertos postulados), no es un método de descubrimiento, y su aplicación reposa necesariamente sobre el conocimiento previo del resultado a demostrar; como dice Arquímedes, «*de aquellos resultados de los que Eudoxio ha sido el primero en hallar la demostración, a propósito del cono y de la pirámide..., una parte no pequeña le corresponde a Demócrito, que fue el primero en enunciarlos sin demostración*» (*loc. cit.*, p. 430). Esta circunstancia hace especialmente difícil el análisis de la obra de Arquímedes, análisis que, para ser sinceros, no parece haber sido emprendido por ningún historiador moderno; ignoramos hasta qué punto era Arquímedes consciente de los lazos de parentesco que unen los distintos problemas que trata (lazos que nosotros expresaríamos diciendo que la misma integral aparece en muchos lugares bajo aspectos geométricos diferentes), e ignoramos también cuál era la importancia que les atribuía. Consideremos por ejemplo los siguientes problemas, resuelto el primero de ellos por Eudoxio y los demás por Arquímedes: el volumen de la pirámide, el área del segmento de parábola, el centro de gravedad del triángulo y el área de la llamada espiral de Arquímedes ($\rho = c\omega$ en coordenadas polares), todas ellas dependen de la integral $\int x^2 dx$, y, sin apartarse en nada del espíritu del «método exhaustivo», todas ellas pueden reducirse al cálculo de «sumas de Riemann» de la forma $\sum_n an^2$. Es efectivamente de este modo como Arquímedes

trata el problema de la espiral ([*5b*], t. II, pp. 1-121) por medio de un lema equivalente a escribir

$$N^3 < 3 \sum_{n=1}^{N} n^2 = N^3 + N^2 + \sum_{n=1}^{N} n < (N + 1)^3.$$

En lo que se refiere al centro de gravedad del triángulo, demuestra (usando el método exhaustivo, por medio de una descomposición en franjas paralelas) que se encuentra en cada una de las medianas, y por tanto en su punto de encuentro ([*5* b], t. II, pp. 261-315). Para la parábola da tres procedimientos: uno heurístico, destinado solamente a «*dar cierta verosimilitud al resultado*», reduce el problema al del centro de gravedad del triángulo, mediante un razonamiento de estática a lo largo del cual no duda en considerar el segmento de parábola como suma de infinitos segmentos de recta paralelos al eje ([*5* b], t. II, pp. 435-439); otro método se apoya en un principio análogo, pero está redactado con todo rigor siguiendo el método exhaustivo ([*5* b], t. II, pp. 261-315); una última demostración, extraordinariamente ingeniosa pero de menos alcance, nos da el área buscada como suma de una serie geométrica empleando propiedades particulares de la parábola. No hay nada que indique una relación entre estos problemas y el del volumen de la pirámide, incluso se especifica ([*5* b], t. II, p. 8) que los problemas relativos a la espiral no tienen «nada en común» con otros relativos a la esfera y al paraboloide de revolución, de los que Arquímedes ha tenido ocasión de hablar en la misma introducción, y entre los cuales se encuentra uno (el del volumen del paraboloide) que se reduce a la integral $\int x dx$.

Como puede verse a partir de estos ejemplos, y salvo el empleo de artificios particulares, el método exhaustivo consiste en lo siguiente: por medio de una descomposición en «sumas de Riemann» se obtienen cotas superiores e inferiores de la cantidad estudiada, cotas que se comparan directamente con el valor previsto de esta cantidad, o bien con las cotas correspondientes para un problema análogo ya resuelto. La comparación (que, al no poder usarse números negativos ha de hacerse necesariamente en dos partes) es introducida por la fórmula sacramental: «en efecto, si no, tendría que ser o mayor o menor; supongamos, si se puede, que sea mayor, etc.; supongamos, si se puede, que sea menor, etc.», de aquí viene el nombre de método «apagógico» o «por reducción al absurdo» («ἀπαγωγὴ εἰς ἀδύνατον») que le dan los sabios del siglo XVII. La determinación de la tangente a la espiral por Arquímedes está redactada de una forma análoga ([*5* b], t. II, pp. 62-76), se trata de un resultado aislado, que es el único que podemos citar como fuente antigua del «cálculo diferencial», aparte de la determinación relativamente fácil de las tangentes a las cónicas y de algunos problemas de máximos y mínimos. En efecto, si bien en lo referente a la «integración» se abría ante los matemáticos griegos un inmenso campo de trabajo, no solamente en la teoría de las áreas y los volúmenes, sino también en la estática y la hidrostática, no tuvieron ocasión, al carecer de una cinemática, de abordar seriamente la diferenciación. Es cierto que Arquímedes da una definición cinemática de su espiral, y, no sabiendo la forma en que llegó al conocimiento de su tangente, hay razones para pensar que tal vez tuviese alguna idea de la composición de movimientos. Pero si así fuese, ¿no habría aplicado un método tan potente a otros problemas del mismo género? Es mucho más verosimil pensar que debió emplear algún procedimiento heurístico de paso al límite que pudieron sugerirle los resultados conocidos para las cónicas; estos resultados, desde luego, son de naturaleza mucho más simple, puesto que se pueden construir los puntos de intersección de una recta y una cónica, y por tanto determinar la condición de coincidencia de dichos puntos. En lo que se refiere a la definición de tangente, ésta es concebida como una recta que, cerca de un cierto punto de la curva, deja toda la curva a un mismo lado; su existencia se admite, y se admite también que toda curva está compuesta de arcos convexos; para demostrar, en estas condiciones, que una recta es tangente a una curva, es necesario demostrar ciertas desigualdades, lo que se hace desde luego con toda precisión.

Los métodos de Arquímedes no dejan nada que desear desde el punto de vista del rigor, y, todavía en el siglo XVII, cuando los matemáticos más escrupulosos querían dejar fuera de dudas un resultado considerado como particularmente delicado, daban de él una demostración «apagógica» ([*109*], t. I, pp. 211-254; trad. francesa t. III, pp. 181-215) y ([*244*], t. VIII, pp. 249-282). En cuanto a su fecundidad, basta citar la obra de Arquímedes como testimonio.

Pero para poder ver en ella un «cálculo integral», sería necesario poner de manifiesto, entre la multiplicidad de apariencias geométricas, algún esbozo de clasificación de los problemas según la naturaleza de la «integral» subyacente. En el siglo XVII, como vamos a ver, el hallazgo de una clasificación de este tipo se convierte en una de las principales preocupaciones de los geómetras; si no encontramos en Arquímedes ningún indicio de ella, ¿no es éste un signo de que tales especulaciones le resultarían exageradamente «abstractas», y que por el contrario, él se habría mantenido, en cada caso particular, lo más cerca posible de las propiedades específicas de la figura estudiada? ¿Y no deberemos sacar la conclusión de que esta obra admirable, de la que ha surgido todo el cálculo integral, según sus propios autores, es de alguna manera lo contrario del cálculo integral?

Además, en las matemáticas no puede abrirse impunemente un foso entre descubrimiento y demostración. En las épocas favorables, el matemático, sin faltar para nada al rigor, no tiene otra cosa que hacer que escribir sus ideas casi tal y como las concibe; otras veces puede esperar hacerlo de modo que resulte así, mediante un cambio afortunado en el lenguaje y en las notaciones admitidas. Pero muy a menudo el matemático se debe resignar a elegir entre métodos de exposición incorrectos y tal vez fecundos, y métodos correctos que solamente le permiten expresar su pensamiento deformándolo previamente, y pagando el precio de un esfuerzo agotador. Ninguno de los dos caminos carece de peligros. Los griegos siguieron el segundo, y es tal vez aquí, más que en el efecto esterilizante de la conquista romana, donde hay que buscar la razón del sorprendente estancamiento de su matemática casi inmediatamente después de su momento más brillante. Ha sido sugerido, y no es inverosímil, que la enseñanza oral de los sucesores de Arquímedes y de Apolonio podría contener numerosos resultados nuevos, sin que dichos sucesores se considerasen obligados a realizar el extraordinario esfuerzo necesario para publicarlos de acuerdo con los cánones recibidos. De cualquier manera, no fueron precisamente estos escrúpulos los que hicieran detenerse a los matemáticos del siglo XVII cuando, ante la multitud de problemas nuevos que se les planteaban, buscaron en el estudio asiduo de los escritos de Arquímedes los medios de superarlos.

Mientras que todos los grandes clásicos de la literatura y de la filosofía griegas fueron impresos en Italia por Aldo Manuce y sus competidores, y casi todos antes de 1520, la edición «princeps» de Arquímedes en griego y en latín [5 a] no aparece hasta 1544, y en Hervagius, en Basilea, sin ser preparada por ninguna edición anterior en latín, y, sin que en modo alguno los matemáticos de esta época (absorbidos como estaban por sus trabajos sobre álgebra) sintieran enseguida su influencia; hay que esperar hasta Galileo y Kepler, ambos astrónomos y físicos mucho más que matemáticos, para que dicha influencia se manifieste. A partir de este momento, y ya sin interrupción hasta más o menos 1670, no hay ningún nombre que aparezca más a menudo que el de Arquímedes en los escritos de los fundadores del Cálculo infinitesimal. Varios lo traducen y comentan; todos, desde Fermat hasta Barrow, lo citan profusamente; todos declaran encontrar en él a la vez un modelo y una fuente de inspiración.

Es cierto que estas declaraciones, como vamos a ver, no deben ser todas ellas tomadas al pie de la letra, y esta es una de las dificultades más importantes para una interpretación justa de estos escritos. El historiador debe tener en cuenta también la organización en esta época del mundo científico, todavía muy defectuosa al principio del siglo XVII, mientras que a finales de dicho siglo, con la creación de las sociedades de sabios y de las revistas científicas, y con la consolidación y el desarrollo de las universidades, se parece ya bastante a la que conocemos hoy. Privados de toda revista hasta 1665, los matemáticos solo podían elegir, a la hora de dar a conocer sus trabajos, entre la vía epistolar y la impresión de un libro, casi siempre por su cuenta, o a cargo de un mecenas, si lo encontraban. Los editores e impresores capaces de trabajar de esta forma eran raros, y a veces poco seguros. Después de las largas esperas y de las incomodidades sin fin que suponía una publicación de este tipo, el autor tenía generalmente que hacer frente a controversias interminables, provocadas por adversarios que no siempre obraban de buena fe, y que se desarrollaban a veces en un tono sorprendentemente agrio, ya que, dentro de la incertidumbre general en que se estaba con respecto a los mismos principios del cálculo infinitesimal, no era difícil para nadie encontrar puntos débiles, o al menos oscuros

y discutibles, en los razonamientos de sus rivales. Es comprensible que ante tales condiciones, muchos sabios deseosos de tranquilidad se contentasen con comunicar a algunos amigos elegidos sus métodos y sus resultados. Algunos, sobre todo ciertos aficionados a la ciencia, como Mersenne en París, y después Collins en Londres, mantenían una vasta correspondencia con todos los países, de la que comunicaban resúmenes a unos y a otros, no sin mezclar a estos resúmenes majaderías de su propia cosecha. Estando en posesión de «métodos» que, a falta de nociones y de definiciones generales, no podían redactar en forma de teoremas, ni siquiera formular con cierta precisión, los matemáticos quedaban reducidos a ensayarlos en multitud de casos particulares, y, a fin de medir su potencia, creían no poder hacer nada mejor que desafiar a sus colegas, acompañando a veces estos desafíos con la publicación de sus propios resultados en lenguaje cifrado. La juventud estudiosa viajaba, quizá más que hoy, y las ideas de los sabios se extendían a veces mejor mediante los viajes de alguno de sus alumnos que por sus propias publicaciones, pero no sin que esto fuese otra fuente de malentendidos. Por último, al plantearse los mismos problemas a multitud de matemáticos, muchos de ellos distinguidos, y que poseían un conocimiento imperfecto de los trabajos de los otros, las reclamaciones de prioridad estaban a la orden del día, y no era extraño que a ellas se uniesen acusaciones de plagio.

Así pues, el historiador debe buscar sus documentos en las cartas y los papeles personales de los sabios tanto o más que en sus publicaciones propiamente dichas. Pero, mientras que, por ejemplo, los de Huygens han sido conservados, y se ha hecho de ellos una publicación ejemplar [*169* b], los de Leibniz no han sido publicados hasta ahora más que de una manera fragmentaria, y muchos otros se han perdido irremediablemente. Por lo menos las investigaciones más recientes, fundadas en el análisis de los manuscritos, han servido para poner en evidencia, de una forma que parece irrefutable, un punto que las querellas entre partidarios parecían haber oscurecido en parte: cada vez que uno de los grandes matemáticos de esta época ha dado testimonio de su propio trabajo, de la evolución de su pensamiento, de las influencias que ha sufrido o ha dejado de sufrir, lo hace de una manera honesta y sincera, con toda buena

fe [1]; estos precisos testimonios, de los que poseemos un gran número, pueden por tanto ser usados con toda confianza, y el historiador no tiene que adoptar respecto a ellos la postura de un juez de instrucción. Además, la mayor parte de las cuestiones de prioridad surgidas carecen por completo de sentido. Es cierto que Leibniz, cuando adopta la notación dx para la «diferencial», ignoraba que Newton empleaba $\dot{x}$ para la «fluxión» desde diez años antes, ¿pero qué importa que lo hubiese sabido? Para considerar un ejemplo más instructivo, ¿quién es el autor del teorema $\log x = \int \frac{dx}{x}$, y cuál es su fecha? La fórmula, tal y como acabamos de escribirla, es de Leibniz, puesto que ambos miembros están escritos con su notación. El mismo Leibniz, y Wallis, se la atribuyen a Gregorio de Saint-Vincent. Este último, en su *Opus Geometricum* [*135*] (aparecido en 1647, pero redactado, según dice, mucho tiempo antes) demuestra solamente la equivalencia de lo que sigue: Si $f(a, b)$ designa el área del segmento hiperbólico $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq A/x$, la relación $b'/a' = (b/a)^n$ implica $f(a', b') = n.f(a, b)$, a lo que su alumno y comentador Sarasa añade casi inmediatamente [*269*] la observación de que las áreas $f(a, b)$ pueden entonces «hacer el papel de logaritmos». Si Sarasa no añade nada más, y si el mismo Gregorio no había dicho nada de ello, ¿no será debido a que para la mayor parte de los matemáticos de esta época los logaritmos eran simples «ayudas para calcular» sin ningún derecho de ciudadanía dentro de las matemáticas? Es verdad que Torricelli, en una carta de 1644 [*208*], habla de sus trabajos sobre una curva que nosotros escribiríamos $y = ae^{-cx}$, $x \geq 0$, añadiendo que allí donde Neper (al que por otra parte llena de elogios) «*solo buscaba la práctica aritmética*», él «*obtenía de ella una especulación geométrica*», y ha dejado un manuscrito sobre esta curva evidentemente preparado para su publicación, pero que permaneció inédito hasta 1900 ([*310*], t. I, pp. 335-347). Además, Descartes había encontrado la misma curva en 1639 a propósito del «problema de Debeaune», y la había descrito sin

[1] Esto se aplica por ejemplo a Torricelli (véase [*244*], t. VIII, pp. 181-194) y a Leibniz [*217*]. Desde luego que esto no quiere decir que un matemático no pueda hacerse ilusiones sobre la originalidad de sus ideas, pero no son precisamente los más grandes los más propensos a equivocarse a este respecto.

hablar de logaritmos ([*85* a], t. II, pp. 514-517). Como quiera que sea, J. Gregory, en 1667, da, sin citar a nadie ([*136* a], reproducido en [*169* a], pp. 407-462), una regla para calcular las áreas de los segmentos parabólicos mediante logaritmos (decimales), lo que implica simultáneamente el conocimiento teórico de la relación entre la cuadratura de la hipérbola y los logaritmos, y el conocimiento numérico de la relación entre los logaritmos «naturales» y los «decimales». ¿Debe aplicarse solamente a este punto la reivindicación de Huygens, que niega inmediatamente la novedad del resultado de Gregory ([*169* b], t. VI, pp. 228-230)? Esto es lo que no está más claro para nosotros de lo que lo estaba para sus contemporáneos, en todo caso estos tuvieron muy clara la impresión de que la existencia de una relación entre los logaritmos y la cuadratura de la hipérbola era cosa conocida desde hacía mucho tiempo, sin poder referirse a otra cosa que a alusiones epistolares, o bien al libro de Gregorio de Saint-Vincent. En 1668, cuando Brouncker da (con una demostración cuidada de la convergencia, mediante la comparación con una serie geométrica) series para log 2 y log (5/4) ([*38*], reproducido en [*218*], t. I, pp. 213-218), las presenta como expresiones de los segmentos de hipérbola correspondientes, y añade que los valores numéricos que obtiene están «en la misma relación que los logaritmos» de 2 y de 5/4. Pero el mismo año, con Mercator ([*220*], reproducido en [*218*], t. I, pp. 167-196) (o más exactamente con la exposición dada inmediatamente por Wallis del trabajo de Mercator ([*326* b], reproducido en [*218*], t. I, pp. 219-226)), cambia el lenguaje: puesto que los segmentos de hipérbola son proporcionales a los logaritmos, y es un hecho bien conocido que los logaritmos solamente están definidos por sus propiedades características a menos de un factor constante, no hay nada que impida considerar los segmentos de hipérbola como logaritmos, calificados de «naturales» (en oposición a los logaritmos «artificiales» o «decimales»), o hiperbólicos. Una vez dado este paso (a lo que contribuyó la serie dada para log $(1 + x)$ por Mercator), el teorema $\log x = \int \frac{dx}{x}$ ha sido obtenido, salvo la notación, o más bien se convierte en una definición. ¿Qué conclusión hemos de sacar de aquí, si no es la de que el descubrimiento se realiza por medio de transiciones casi

insensibles, y que una disputa de prioridades sobre este asunto se parecería mucho a una querella entre el violín y el trombón acerca del momento exacto en el que aparece un motivo en una sinfonía? Y hay que decir que, mientras que otras creaciones matemáticas de la misma época, como la aritmética de Fermat, o la dinámica de Newton, tienen un sello poderosamente individual, el desarrollo del cálculo infinitesimal durante el siglo XVII hace pensar mucho más en el desarrollo gradual e inevitable de una sinfonía de la que el «Zeitgeist», compositor y director de orquesta a la vez, marcaría el compás: cada uno ejecuta en ella su parte con su propio timbre, pero nadie es dueño de los temas que toca, temas que han sido entrelazados casi inextricablemente por un sabio contrapunto. Por tanto, su historia deberá escribirse en la forma de un análisis temático, nos contentaremos aquí con un resumen sumario, que no pretende tener una exactitud minuciosa[2]. Estos son en todo caso los temas principales que surgen en un examen superficial:

A) El tema del *rigor matemático*, en contraste con el de los *infinitamente pequeños*, *indivisibles*, o *diferenciales*. Hemos visto que ambos ocupan un lugar importante en Arquímedes, el primero a lo largo de toda su obra, el segundo en el tratado del Método, que no fue conocido del siglo XVII, de tal modo que si fue trasmitido, y no reinventado, solamente pudo serlo por la tradición filosófica. Además, el principio de los infinitamente pequeños aparece en dos formas distintas, según se trate de la «diferenciación» o de la «integración». En lo que a ésta se refiere, consideremos en primer lugar el cálculo de un área plana: se la divide en una infinidad de franjas paralelas infinitamente pequeñas por medio de infinitas paralelas equidistantes, y cada una de estas franjas paralelas es un rectángulo (aunque ninguna de las franjas finitas obtenidas mediante dos paralelas a distancia finita sea un rectángulo). Igualmente, un sólido de revolución sería descompuesto en infinitos cilindros de igual

[2] En lo que sigue, la atribución de un resultado a tal autor y en tal fecha indicará solamente que este resultado le era conocido en esa fecha (lo que ha sido verificado siempre que ha sido posible sobre los textos originales), con esto no queremos afirmar de un modo absoluto que este autor no lo conociese antes, ni que no haya podido recibir este conocimiento de otro, ni mucho menos todavía decir que este mismo resultado no haya podido ser obtenido independientemente por otros, bien antes o bien después.

altura infinitamente pequeña por medio de planos perpendiculares al eje[3]; podrían emplearse formas de hablar similares a la hora de descomponer un área en triángulos por medio de rectas concurrentes, o de razonar acerca de la longitud de un arco de curva como si se tratase de un polígono de infinitos lados, etc. Es cierto que los pocos matemáticos que dominaban realmente el manejo de los métodos de Arquímedes, como Fermat, Pascal, Huygens y Barrow, no hubiesen encontrado ninguna dificultad para, en cada caso particular, sustituir por medio de demostraciones rigurosas el empleo de este lenguaje. En efecto, todos ellos señalan frecuentemente que dicho lenguaje solo les sirve como abreviatura. «*Sería fácil* —dice Fermat— *dar demostraciones a la manera de Arquímedes*...; *bastará advertirlo de una vez por todas para evitar repeticiones continuas*...» ([*109*], t. I, p. 257); igualmente Pascal: «*así pues estos dos métodos solamente se diferencian en la forma de hablar*» ([*244*], t. VIII, p. 352)[4]; y Barrow, con su concisión socarrona: «*longior discursus apagogicus adhiberi possit, sed quorsum?*» (podríamos alargarlo con un discurso apagógico, ¿pero para qué?) ([*16* b], p. 251). Fermat parece incluso limitarse a no adelantar nada que no pueda ser justificado de este modo, condenándose por ello a no enunciar ningún resultado general más que mediante alusiones o en forma de «método»; Barrow, tan minucioso por otra parte, es algo menos escrupuloso. En cuanto a la mayor parte de sus contemporáneos, no puede decirse que el rigor sea su preocupación principal, y el nombre de Arquímedes no es casi siempre otra cosa que un reclamo para vender una mercancía, sin duda de gran valor, pero de la que el propio Arquímedes no se hubiera hecho responsable. Y esto sucede mucho más todavía con la diferenciación. Si una curva, cuando se trata de su rectificación, se asimila a un polígono de infinitos lados, aquí un arco «infinitamente pequeño» de curva es asimilado a un segmento «infinitamente pequeño» de recta, bien a la cuerda, bien a un segmento de la tangente cuya existencia se admite; o bien se considera un intervalo de tiempo «infinitamente pequeño» durante el que (mientras se trata solamente de la velocidad) se considera que el movimiento es «uniforme». Todavía más atrevido, Descartes, queriendo determinar la tangente a la cicloide, que no entra en la regla general, asimila dos curvas rodando una sobre otra a polígonos, para deducir a partir de aquí que «en el infinitamente pequeño» el movimiento puede ser asimilado a una rotación alrededor del punto de contacto ([*85* a], t. II, pp. 307-338). También aquí un Fermat, que hace reposar sus reglas para el cálculo de las tangentes y para los máximos y mínimos sobre estas consideraciones infinitesimales, está en condiciones de justificarlas en cada caso particular ([*109*], t. I, pp. 133-179; trad. francesa, t. III, pp. 121-156); cf. también ([*109*], t. II, *pássim*, en particular pp. 154-162, y el *Suplemento a las Obras*, pp. 72-86); Barrow da para la mayor parte de sus teoremas demostraciones precisas al modo de los antiguos, a partir de hipótesis sencillas de monotonía y de convexidad. Pero ya no era cosa de meter el vino nuevo en odres viejos. A lo largo de todos estos trabajos, como sabemos hoy, iba elaborándose la noción de límite, y si bien podemos encontrar en Pascal, en Newton, y en otros matemáticos, algunos enunciados que parecen bastante cercanos a nuestras definiciones modernas, basta volver a situarlas en su propio contexto para darse cuenta de los obstáculos invencibles que se oponían a una exposición rigurosa. Cuando, a partir del siglo XVIII, algunos matemáticos deseosos de claridad quisieron implantar un cierto orden en el confuso amasijo de sus riquezas, dichas indicaciones, encontradas en los escritos de sus antepasados, tuvieron para ellos un valor precioso; cuando d'Alembert explica, por ejemplo, que en la diferenciación no interviene nada distinto de la noción de límite, y define esta última con precisión [*75* b], podemos creer que ha sido guiado por las consideraciones de Newton acerca de «primeras y últimas razones de las cantidades evanescentes» [*233* b]. Pero, mientras no salgamos del siglo XVII, hay que dejar bien señalado que solo se abre paso al análisis moderno cuando Newton y Leibniz, volviendo la espalda al pasado, aceptan buscar provisionalmente la justificación de los nuevos métodos, no en demostraciones rigurosas, sino en la fecundidad y la coherencia de los resultados.

[3] Véase por ejemplo la exposición de Pascal en la «carta a M. de Carcavy» ([*244*], t. VIII, pp. 334-384). Se advertirá que, gracias al prestigio de un lenguaje incomparable, Pascal consigue crear la ilusión de una perfecta claridad, hasta el punto de que uno de sus editores modernos se extasía ante «la minucia y la precisión en la exactitud de la demostración».

[4] Pero, en la Carta al Señor A. D. D. S.: «...*sin detenerme, ni en los métodos de los movimientos ni en los de los indivisibles, sino siguiendo los de los antiguos, a fin de que la cosa sea a partir de ahora firme y sin disputa*» ([*244*], t. VIII, p. 256).

B) La *cinemática*. Ya Arquímedes, como hemos visto, dio una definición cinemática de su espiral, y durante la Edad Media se desarrolla (sin consideraciones infinitesimales, mientras no se demuestre lo contrario) una teoría rudimentaria de la variación de las magnitudes en función del tiempo, y de su representación gráfica, cuyo origen puede hacerse remontar a la astronomía babilónica. Un hecho de la mayor importancia para la matemática del siglo XVII es el de que, desde el principio, los problemas de diferenciación se presentasen no solamente a propósito de las tangentes, sino también a propósito de las velocidades. Sin embargo, Galileo ([*122* a y b]), al buscar la ley de las velocidades en la caída de los cuerpos (después de haber obtenido para los espacios la ley $x = at^2$ mediante la experiencia del plano inclinado) no emplea la diferenciación: hace diversas hipótesis sobre la velocidad, primeramente, $v = \frac{dx}{dt} = cx$ ([*122* b], t. VIII, p. 203), y después $v = ct$ (id., p. 208), e intenta encontrar la ley para los espacios razonando de una forma bastante oscura sobre la gráfica de la velocidad en función del tiempo. Descartes, en 1618, razona igualmente sobre la $v = ct$, pero en tanto que auténtico matemático, y con tanta claridad como es posible dentro del lenguaje de los indivisibles[5] ([*85* a], t. X, pp. 75-78). En ambos el papel principal corresponde a la gráfica de la velocidad (en particular una recta) y hay motivo para preguntarse hasta qué punto fueron conscientes de la proporcionalidad entre los espacios recorridos y las áreas comprendidas entre el eje de los tiempos y la curva de las velocidades; pero sobre este punto resulta difícil hacer ninguna afirmación, aunque el lenguaje de Descartes parezca indicar el conocimiento del hecho en cuestión (que algunos historiadores quieren remontar a la Edad Media [*335*]), mientras que Galileo no hace ninguna alusión clara sobre el asunto. Barrow la enuncia

[5] Descartes añade incluso un interesante razonamiento geométrico mediante el cual deduce la ley $x = at^3$ a partir de la hipótesis $\frac{dv}{dt} = ct$. Resulta curioso por el contrario verle, diez años más tarde, embrollarse en sus notas y volver a copiar al estilo de Mersenne un razonamiento inexacto sobre la misma cuestión, en el que la gráfica de la velocidad en función del tiempo se confunde con la gráfica en función del espacio recorrido ([*85* a], t. I, p. 71).

explícitamente en 1670 ([*16* b], p. 171), tal vez ya no era entonces una novedad para nadie, y Barrow no la considera como tal, pero para este resultado, al igual que para todos los demás, no parece conveniente querer fijar una fecha con demasiada precisión. En cuanto a la hipótesis $v = cx$, también considerada por Galileo, se contenta (*loc. cit.*) con demostrar que es insostenible (o, en lenguaje moderno, que la ecuación $\frac{dx}{dt} = cx$ no tiene solución $\neq 0$ que se anule para $t = 0$), mediante un razonamiento oscuro que Fermat, algo más tarde ([*109*], t. II, pp. 267-276) se toma el trabajo de detallar (y que se reduce más o menos a decir que $2x$, que es solución al igual que x, $x \neq 0$, estaría en contra de la unicidad físicamente evidente de la solución). Pero precisamente es esta misma ley $\frac{dx}{dt} = cx$ la que le sirve a Neper, en 1614, para introducir sus logaritmos, de los que da una definición cinemática [*230* a] que, con nuestra notación, se escribiría en la forma siguiente: si dos móviles se desplazan sobre dos rectas de acuerdo con las leyes $\frac{dx}{dt} = a$, $\frac{dy}{dt} = -ay/r$, $x_0 = 0$, $y_0 = r$, entonces se dice que x es el «logaritmo» de y (en notación moderna, se tiene $x = r \log (r/y)$). Ya hemos dicho que la curva solución de $\frac{dy}{dx} = \frac{c}{x}$ aparece, en 1639, en Descartes, que la describe cinemáticamente ([*85* a], t. II, pp. 514-517), y si bien es cierto que trata desdeñosamente de «mecánicas» a todas las curvas no algebraicas, y que pretendía excluirlas de la geometría, este tabú, contra el que protestó vigorosamente Leibniz mucho más tarde, no fue observado por sus contemporáneos, y ni siquiera lo fue por el mismo Descartes. La cicloide y la espiral logarítmica aparecen y son estudiadas con ardor, y su estudio contribuye poderosamente a la compenetración de los métodos geométrico y cinemático. El principio de la composición de movimientos, y más precisamente de la composición de velocidades, estaba en la base de la teoría del movimiento de los proyectiles expuesta por Galileo en la obra maestra de su vejez, los *Discorsi* (Discursos), de 1638 ([*122* b], t. VIII, pp. 268-313), teoría que contenía, por tanto, implícitamente una nueva determinación de la tangente a la parábola, y si bien Galileo no insiste especialmente en este punto,

Torricelli, por el contrario, lo hace ([*310*], t. III, pp. 103-159), y fundamenta sobre el mismo principio un método general de determinación de tangentes para aquellas curvas susceptibles de una definición cinemática. Hay que reconocer que en esto había sido adelantando en varios años por Roberval ([*263*], pp. 3-67), que afirma haber sido llevado a este método por el estudio de la cicloide; este mismo problema de la tangente a la cicloide proporciona, por otra parte, a Fermat la oportunidad de demostrar la potencia de su método de diferenciación ([*109*], t. I, pp. 162-165), mientras que Descartes, incapaz de aplicar en este problema su método algebraico, se ve obligado a inventarse el centro de rotación ([*85* a], t. II, páginas 307-338).

Pero a medida que se desarrolla el Cálculo infinitesimal, la cinemática va dejando de ser una ciencia aparte. Se va observando poco a poco, a pesar de Descartes, que desde el punto de vista «local», que es el del Cálculo infinitesimal, no hay nada que distinga las funciones y curvas algebraicas de otras mucho más generales; las funciones y curvas definidas cinemáticamente son funciones y curvas como las demás, que pueden estudiarse por los mismos métodos, y la variable «tiempo» no es más que un parámetro, cuyo aspecto temporal no es más que una cuestión de lenguaje. Así, en Huygens, incluso cuando trata de la mecánica, predomina la geometría ([*169* b], t. XVIII), y Leibniz no otorga al tiempo en su cálculo ningún papel privilegiado. Por el contrario, Barrow pensó en convertir la variación simultánea de varias magnitudes en función de una variable independiente universal concebida como un «tiempo» en la base de un Cálculo infinitesimal de tendencia geométrica. Esta idea, que debió tener al intentar reconstruir el método de composición de movimientos cuya existencia conocía solamente de oídas, se expone en detalle, en términos muy claros y muy generales, en las tres primeras de sus *Lectiones Geometricae* [*16* b]. Por ejemplo, aquí se demuestra cuidadosamente que si un punto móvil tiene como proyecciones sobre dos ejes rectangulares AY y AZ puntos móviles, uno de los cuales se mueve con una velocidad constante a, y el otro con una velocidad v que crece con el tiempo, la trayectoria tiene una tangente de pendiente igual a v/a y es cóncava en la dirección de las Z crecientes. A lo largo de sus *Lectiones* desarrolla estas ideas con gran amplitud, y a pesar de la coquetería que pone en redactar el texto de principio a fin en una

forma tan geométrica y tan poco algebraica como sea posible, podemos ver aquí, con Jacobo Bernoulli ([*19* a], t. I, pp. 431 y 453), el equivalente de una buena parte del Cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz. Exactamente, las mismas ideas sirven de punto de partida a Newton ([*233* a], t. I, pp. 201-244 y [*233* b]), sus «fluyentes» son las distintas magnitudes, funciones de un «tiempo» que no es otra cosa que un parámetro universal, y las «fluxiones» son las derivadas respecto al tiempo; la posibilidad de cambiar de parámetro si es necesario, que se concede Newton, está igualmente presente en Barrow, aunque éste la emplea con menos soltura[6]. El lenguaje de las fluxiones, adoptado por Newton, e impuesto por su autoridad a los matemáticos ingleses del siglo siguiente, representa, pues, la culminación, para el periodo que nos ocupa, de los métodos cinemáticos, cuyo papel había terminado.

C) La *Geometría algebraica*. Se trata de un tema parásito, extraño a nuestros propósitos, cuya introducción es debida al hecho de que Descartes, por espíritu de sistema, pretendía hacer de las curvas algebraicas el objeto único de la geometría ([*85* a], t. VI, p. 390); también da un método algebraico, y no de Cálculo diferencial como Fermat, para la determinación de las tangentes. Los resultados legados por los antiguos sobre las intersecciones de una recta y una cónica, las reflexiones del mismo Descartes sobre las intersecciones de dos cónicas y los problemas que se reducen a él, debían llevar de un modo natural a la idea de tomar como criterio de contacto la coincidencia de dos intersecciones: hoy día sabemos que éste es el criterio correcto en Geometría algebraica, y de una generalidad tal que es independiente del concepto de límite y de la naturaleza del «cuerpo base». Descartes

[6] El problema de las relaciones entre Barrow y Newton es muy discutido, véase [*241*] y [*233* d]. En una carta de 1663 (cf. [*262*], vol. II, pp. 32-33), Barrow habla de sus reflexiones ya lejanas sobre la composición de movimientos, que le habían llevado a un teorema muy general sobre las tangentes (si se trata del de las *Lect. Geom.*, Lect. X ([*16* b], p. 247), es en efecto tan general que comprendía como caso particular todo lo que había sido hecho hasta entonces sobre el tema). Por otra parte Newton pudo haber sido discípulo de Barrow en 1664 y 1665, pero declara haber obtenido independientemente su regla para deducir, a partir de una relación entre «fluyentes» una relación entre sus «fluxiones». Es posible que Newton tomase de la enseñanza de Barrow la idea general de las magnitudes variando en función del tiempo, y de sus velocidades de variación, nociones que sus reflexiones sobre la dinámica (a las que Barrow debió permanecer totalmente ajeno) contribuyeron muy pronto a precisar.

lo aplica primeramente de una forma poco cómoda, intentando hacer coincidir en un punto dado dos intersecciones de la curva estudiada y de una circunferencia con centro en Ox ([*85* a], t. VI, pp. 413-424); sus discípulos, van Schooten, Hudde, sustituyen la circunferencia por una recta, y obtienen en la forma $-F'_x/F'_y$ la pendiente de la tangente a la curva $F(x, y) = 0$, estando definidos los «polinomios derivados» F'_x, F'_y por su regla de formación ([*198* d], t. I, pp. 147-344 y [*85* b], pp. 234-237); De Sluse llega también a este resultado hacia la misma época ([*198* d], pp. 232-234). No será necesario decir que las distinciones tajantes que señalamos aquí, y que son las únicas que podrían dar un sentido a la controversia entre Descartes y Fermat, no podían estar en modo alguno en la mente de los matemáticos del siglo XVII, y si las hemos mencionado ha sido únicamente para iluminar uno de los episodios más curiosos de la historia que nos ocupa, y para constatar casi inmediatamente el eclipse completo de los métodos algebraicos, provisionalmente absorbidos por los métodos diferenciales.

D) *Clasificación de los problemas*. Este tema, como ya hemos visto, parece ausente en la obra de Arquímedes, a quién resulta bastante indiferente resolver directamente un problema o reducirlo a un problema previamente resuelto. En el siglo XVII, los problemas de diferenciación aparecen primeramente bajo tres aspectos distintos: velocidades, tangentes y máximos y mínimos. En lo que a estos últimos se refiere, Kepler [*179* a y b], hace la observación (que se encuentra ya en Oresme ([*335*], p. 141) y que no había pasado desapercibida de los astrónomos babilonios) de que la variación de una función es particularmente lenta cerca de un máximo. Fermat, desde antes de 1630 ([*109*], t. II, pp. 71 y 113-179) inaugura a propósito de tales problemas su método infinitesimal, que en el lenguaje moderno se reduce en una palabra a buscar los dos primeros términos (el término constante y el término de primer orden) del desarrollo de Taylor, y a escribir que el segundo se anula en un extremo; Fermat parte de aquí para extender su método a la determinación de las tangentes, aplicándolo incluso a la determinación de puntos de inflexión. Si se tiene en cuenta lo que se ha dicho más arriba a propósito de la cinemática, veremos que la unificación de estos tres tipos de problemas relativos a la derivada primera se realizó prontamente. En lo que se refiere a los problemas relativos a la derivada segunda,

no aparecen hasta muy tarde, principalmente con los trabajos de Huygens sobre la evoluta de una curva (publicados, en 1673, en su *Horologium Oscillatorum* ([*169* b], t. XVIII)); ya en este momento, Newton, con sus fluxiones, estaba en posesión de todos los medios analíticos necesarios para la resolución de tales problemas; y, a pesar de todo el talento geométrico empleado por Huygens (del que más tarde la Geometría diferencial, en sus comienzos, se aprovecharía), solo sirvieron, dentro del periodo que nos preocupa, para permitir al nuevo análisis constatar la potencia de sus medios.

En cuanto a la integración, aparecía para los griegos como el cálculo de áreas, de volúmenes, de momentos, y como el cálculo de longitud de una circunferencia y de las áreas de segmentos esféricos, a lo que añadió el siglo XVII la rectificación de curvas, el cálculo del área de las superficies de revolución, y (con los trabajos de Huygens sobre el péndulo compuesto ([*169* b], t. XVIII)) el cálculo de los momentos de inercia. Se trataba, en primer lugar, de encontrar la relación entre todos estos problemas. Para las áreas y los volúmenes, este primer y fundamental paso había sido dado por Cavalieri, en su Geometría de los indivisibles [*57* a]. En ella enuncia, más o menos, y pretende demostrar, el principio siguiente: si dos áreas planas son tales que toda paralela a una dirección dada las corta, según segmentos cuyas longitudes están en una proporción constante, las áreas están en la misma razón; un principio análogo es enunciado para los volúmenes cortados por los planos paralelos a un plano fijo, según áreas cuyas medidas estén en una proporción constante. Es verosímil que estos principios le fuesen sugeridos a Cavalieri por teoremas tales como los de Euclides (o más bien de Eudoxio) sobre la razón de los volúmenes de pirámides de la misma altura, y que antes de enunciarlos de una forma general, había verificado su validez en un gran número de ejemplos tomados de Arquímedes. Cavalieri emplea para «justificarlos» un lenguaje, sobre la legitimidad del cual le vemos interrogar a Galileo en una carta de 1621, mientras que en 1622 lo emplea ya sin ninguna duda ([*122* b], t. XIII, pp. 81 y 86) y del que vamos a indicar lo esencial. Sean, por ejemplo, dos áreas, una $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq f(x)$, la otra $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq g(x)$; las sumas de ordenadas $\sum_{k=0}^{n-1} f(ka/n)$, $\sum_{k=0}^{n-1} g(ka/n)$ están entre sí en una

razón que, para n bastante grande, se aproxima tanto como queramos a la razón de las dos áreas, y tampoco sería difícil demostrarlo empleando el «método exhaustivo» en el caso de que f y g sean monótonas; Cavalieri pasa al límite, hace $n = \infty$, y habla de la «suma de todas las ordenadas» de la primera curva, cuya razón, respecto a la suma correspondiente para la segunda curva, es rigurosamente igual a la razón de las áreas; lo mismo sucede con los volúmenes, y este lenguaje es adoptado universalmente, incluso por autores, como Fermat, que son plenamente conscientes de lo que se oculta tras él. Es cierto que posteriormente muchos matemáticos, tales como Roberval ([*263*], pp. 3-67) y Pascal ([*244*], t. VIII, pp. 334-384), prefieren ver en estas ordenadas de la curva cuya «suma» se efectúa, no ya segmentos de recta como Cavalieri, sino rectángulos con una misma altura infinitamente pequeña, lo que desde el punto de vista del rigor no representa un gran progreso (diga lo que diga Roberval), pero contribuye a impedir que la imaginación se descarríe con demasiada facilidad. En cualquier caso, y puesto que se trata solamente de razones, la expresión «suma de todas las ordenadas» de la curva $y = f(x)$, o abreviadamente «todas las ordenadas» de la curva, es, en definitiva, como aparece claramente, por ejemplo, en los escritos de Pascal, el equivalente exacto del $\int y dx$ leibniziano.

A partir del lenguaje adoptado por Cavalieri se siguen inevitablemente los principios enunciados más arriba, e implican otras consecuencias que vamos a enunciar con la notación moderna, teniendo en cuenta que $\int f dx$ tendrá solamente el significado del área comprendida entre Ox y la curva $y = f(x)$. En primer lugar, toda área plana, cortada por cada recta x = constante, según segmentos la suma de cuyas longitudes es $f(x)$, es igual a $\int f dx$, y lo mismo sucede con cualquier volumen cortado por cada plano x = constante, según un área de medida $f(x)$. Además, $\int f dx$ depende linealmente de f; se tiene $\int (f + g) dx = \int f dx + \int g dx$, y

$\int c f dx = c \int f dx$. En particular, todos los problemas de áreas y volúmenes se reducen a cuadraturas, es decir, al cálculo de áreas de la forma $\int f dx$, y, lo que es quizá todavía más nuevo e importante, dos problemas que dependen de la misma cuadratura deben considerarse como equivalentes, y se tiene siempre un medio de saber si es así. Los matemáticos griegos nunca alcanzaron (o nunca consintieron en alcanzar) tal grado de «abstracción». Así, Cavalieri ([*57* a], p. 133) «demuestra» sin dificultad que dos volúmenes semejantes están entre ellos en una relación igual al cubo de la razón de semejanza, mientras que Arquímedes no enuncia esta conclusión, para las cuádricas de revolución y sus segmentos, hasta el final de su teoría de estos sólidos ([*5* b], t. I, p. 258). Pero para llegar aquí había sido necesario lanzar el rigor de Arquímedes por la borda.

Se disponía, pues, de la manera de clasificar los problemas, al menos provisionalmente, de acuerdo con el grado de dificultad real o aparente que presentaban las cuadraturas a que daban lugar. En este aspecto es en el que sirvió de modelo el álgebra de la época, ya que también en álgebra, y en los problemas algebraicos planteados en Geometría, contrariamente a los griegos que solamente se interesaban por las soluciones, los algebristas de los siglos XVI y XVII comenzaron a dirigir su atención principalmente hacia la clasificación de los problemas, según los medios que podían permitir resolverlos, anticipando de este modo la moderna teoría de las extensiones algebraicas, y no solamente procedieron a una primera clasificación de los problemas, según el grado de la ecuación de la que dependían, sino que ya se plantearon difíciles cuestiones de posibilidad: posibilidad de resolver toda ecuación por radicales (en la que algunos ya no creían), etcétera; preocupándose también de reducir a una forma geométrica tipo todos los problemas de un mismo grado. De igual modo, en Cálculo integral, los principios de Cavalieri le llevan a reconocer que muchos problemas resueltos por Arquímedes se reducen a cuadraturas $\int x^n dx$ para $n = 1, 2, 3$, e imagina un ingenioso método para

efectuar esta cuadratura para tantos valores de n como se quiera (el método se reduce a observar que se tiene $\int_0^{2a} x^n dx = c_n a^{n+1}$ por homogeneidad, y a escribir

$$\int_0^{2a} x^n dx = \int_{-a}^{a} (a + x)^n dx = \int_0^a [(a + x)^n + (a - x)^n] dx,$$

de donde, se obtiene, desarrollando, una relación de recurrencia para los c_n) ([*57* a], p. 159 y [*57* b], pp. 269-273). Pero Fermat había llegado ya mucho más lejos, demostrando primeramente (antes de 1636) que $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ para n entero positivo ([*109*], t. II, p. 83), por medio de una fórmula para las sumas de las potencias de los N primeros números enteros (procedimiento imitado a partir de la cuadratura de la espiral por Arquímedes), y extendiendo después la misma fórmula a todo n racional $\neq -1$ ([*109*], t. I, pp. 195-198); de este último resultado (comunicado a Cavalieri, en 1644) tarda mucho en redactar una demostración, después de la lectura de los escritos de Pascal sobre la integración [7] ([*109*], t. I, pp. 255-288; traducción francesa, t. III, pp. 216-240).

Estos resultados, unidos a consideraciones geométricas que desempeñan el papel de los cambios de variables y de la integración por partes, permiten ya resolver un gran número de problemas que se reducen a cuadraturas elementales. Un poco más allá se encuentran, en primer lugar, la cuadratura del círculo y la de la hipérbola: como en esta época se trata sobre todo de «integrales indefinidas», la solución de estos problemas, en términos modernos, viene dada por las funciones circulares recíprocas y por el logaritmo respectivamente; las primeras estaban dadas geométricamente, y ya hemos visto

[7] Resulta notable que Fermat, tan escrupuloso, utilice la aditividad de la integral, sin una palabra que la justifique, en las aplicaciones que da de sus resultados generales. ¿Se basa en la monotonía a trozos, admitida implícitamente, de las funciones que estudia, mediante la cual no es difícil en efecto justificar la aditividad por el «método exhaustivo»? ¿O bien se ha dejado llevar, a pesar de sí mismo, por el lenguaje de que se sirve?

cómo el último fue introduciéndose poco a poco en el análisis. Estas cuadraturas son objeto de numerosos trabajos, de Gregorio de Saint-Vincent [*135*], Huygens ([*169* b], t. XI, pp. 271-337 y t. XII, pp. 91-180), Wallis ([*326* a], t. I, pp. 355-478) y Gregory [*136* a], el primero cree conseguir la cuadratura del círculo y el último cree demostrar la trascendencia de π; en unos y otros aparecen procedimientos de aproximación indefinida de las funciones circulares y logarítmicas, unos de tendencia teórica y otros orientados hacia el cálculo numérico, que darán lugar enseguida, con Newton ([*233* a], t. I, pp. 3-26 y 29-199), Mercator ([*220*], reproducido en [*218*], t. I, pp. 167-196), J. Gregory [*136* d], y después con Leibniz [*198* d], a los métodos generales de desarrollo en serie. En cualquier caso, va abriéndose paso poco a poco la convicción de la «imposibilidad» de las cuadraturas en cuestión, es decir, del carácter no algebraico de las funciones definidas por ellas, y al mismo tiempo se considera que un problema está resuelto cuando se reduce a una de estas cuadraturas «imposibles». Este es el caso, por ejemplo, de los problemas relativos a la cicloide, resueltos por las funciones circulares, y de la rectificación de la parábola, reducido a la cuadratura de la hipérbola.

Los problemas de rectificación, de los que acabamos de citar dos de los más famosos, han tenido una importancia particular, en tanto que forman una transición geométrica natural entre la diferenciación, que presuponen, y la integración, a la que se reducen; a ellos pueden asociarse los problemas relativos a las áreas de las superficies de revolución. Los antiguos solamente se habían ocupado de los casos del círculo y de la esfera. En el siglo XVII estas cuestiones no aparecen hasta muy tarde, parece como si la dificultad, invencible para la época, de la rectificación de la elipse (considerada como la curva más sencilla después del círculo), hubiese llevado al desánimo. Los métodos cinemáticos permiten atacar ciertos problemas, lo que les sirve a Roberval ([*263*], pp. 363-399) y Torricelli ([*310*], t. III, pp. 103-159), entre 1640 y 1645, para obtener resultados sobre el arco de las espirales, pero no se ponen a la orden del día hasta los años anteriores a 1660, la cicloide es rectificada por Wren en 1658 ([*326* a], t. I, pp. 533-541), y poco después la curva $y^3 = ax^2$ por diversos autores ([*236* a], t. I, pp. 551-553; [*85* b], t. I, pp. 517-520; [*109*], t. I, pp. 211-255; trad. francesa, t. III, pp. 181-215) y también varios autores reducen la rectificación de la parábola a la cuadratura

de la hipérbola (es decir, a una función algebraico-logarítmica) ([*109*], t. I, p. 199; [*169* b], t. II, p. 334). Este último ejemplo es el más importante, puesto que se trata de un caso particular del principio general, según el cual la rectificación de una curva $y = f(x)$ no es otra cosa que la cuadratura de $y = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$, y fue a partir de este principio como la dedujo Heurat. No resulta menos interesante seguir los intentos de un Fermat en declive en su trabajo sobre la curva $y^3 = ax^2$ ([*109*], t. I, pp. 211-255; trad. francesa, t. III, pp. 181-215); asocia a la curva $y = f(x)$, de arco $s = g(x)$, la curva $y = g(x)$ y determina la tangente a ésta a partir de la tangente a la primera (en lenguaje moderno, demuestra que sus pendientes $f'(x)$ y $g'(x)$ están ligadas por la relación $(g'(x))^2 = 1 + (f'(x))^2$); se está muy cerca de Barrow, y solo habría que combinar este resultado con el de Heurat (lo que hace más o menos Gregory, en 1668 ([*136* d], pp. 488-491)) para obtener la relación entre tangentes y cuadraturas; pero Fermat enuncia solamente que si, para dos curvas referidas a un sistema de ejes rectangulares, las tangentes en los puntos de la misma abscisa tienen siempre la misma pendiente, las curvas son iguales, o, dicho de otro modo, que el conocimiento de $f'(x)$ determina $f(x)$ (salvo una constante), y solamente justifica esta afirmación con un oscuro razonamiento sin ningún valor demostrativo.

Antes de que transcurriesen diez años habían aparecido las *Lectiones Geometricae* de Barrow [*16* b]. Ya desde el comienzo (Lect. I), enuncia el principio de que en un movimiento rectilíneo los espacios son proporcionales a las áreas $\int_0^t v\,dt$ comprendidas entre el eje de los tiempos y la curva de las velocidades. Podríamos pensar que a partir de aquí, y de su método cinemático ya citado para la determinación de las tangentes, va a deducir la relación entre la derivada concebida como pendiente de la tangente y la integral concebida como área, pero no hay nada de esto, y más adelante demuestra, de una forma puramente geométrica ([*16* b], Lect. X, §11, p. 243) que si dos curvas $y = f(x)$, $Y = F(x)$ son tales que las ordenadas Y sean proporcionales a las áreas $\int_a^x y\,dx$, es decir, si $c.F(x) = \int_a^x f(x)dx$, entonces la tangente a $Y = F(x)$ corta a Ox en el punto de abscisa $x - T$, determinada por $y/Y = c/T$; la demostración a partir de la hipótesis explícita de que $f(x)$ es monótona, es perfectamente correcta, y se indica que el sentido de variación de $f(x)$ determina el sentido de la concavidad de $Y = F(x)$. Pero debemos observar que este teorema se pierde dentro de una multitud de otros, muy interesantes algunos de ellos; el lector no prevenido estaría inclinado a no ver aquí otra cosa que una manera de resolver por cuadratura el problema $Y/T = f(x)/c$, es decir, un problema de determinación de una curva a partir de ciertos datos sobre su tangente (o, como diríamos nosotros, una ecuación diferencial de un tipo particular), y esto tanto más en cuanto que las aplicaciones que da Barrow se refieren ante todo a problemas del mismo género (es decir, se trata de ecuaciones diferenciales integrables mediante la «separación de variables»). El lenguaje geométrico que Barrow se impone a sí mismo es aquí la causa de que la relación entre diferenciación e integración, tan clara mientras que se trataba solamente de la cinemática, aparezca aquí un poco oscurecida.

Por otra parte, habían ido tomando forma diversos métodos para reducir unos problemas de integración a otros, y «resolverlos», o bien reducirlos, a problemas «imposibles» ya clasificados. En su forma geométrica más sencilla, la integración por partes consiste en escribir el área comprendida entre Ox, Oy y un arco de curva monótona $y = f(x)$ uniendo un punto $(a, 0)$ de Ox a un punto $(0, b)$ de Oy como $\int_0^a y\,dx = \int_0^b x\,dy$, y se utiliza frecuentemente de una manera implícita. En Pascal ([*244*], t. IX, pp. 17-18), aparece la siguiente generalización, mucho menos aparente: sea $f(x)$ como en el caso anterior, sea $g(x)$ una función ≥ 0, y sea $G(x) = \int_0^x g(x)dx$; se tiene entonces $\int_0^a y g(x)dx = \int_0^b G(x)dy$, lo que demuestra de un modo ingenioso calculando de dos maneras el volumen del sólido $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq f(x), 0 \leq z \leq g(x)$; el caso particular $g(x) = x^n$,

$G(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ desempeña un papel importante a la vez en Pascal (*loc. cit.*, pp. 19-21) y en Fermat ([*109*], t. I, p. 271); este último, cuyo trabajo lleva el significativo título de: «*Trasmutación y modificación de las ecuaciones de las curvas, y sus aplicaciones variadas a la comparación de espacios curvilíneos entre sí y con espacios rectilíneos...*», no lo demuestra, sin duda, porque creía inútil repetir lo que acababa de publicar Pascal. Estos teoremas de «trasmutación», en los que veríamos una combinación de integración por partes y de cambio de variables, desempeñan un poco el papel de estos últimos, que tardan mucho en introducirse; en efecto, se trata de algo contrario a la forma de pensamiento, todavía muy geométrico y muy poco analítico, de la época, permitir el uso de variables distintas de las que «impone» la figura, es decir, una u otra de las coordenadas (o a veces coordenadas polares) y, más tarde, el arco de curva. De este modo, encontramos en Pascal ([*244*], t. IX, pp. 60-76) resultados que, en notación moderna, se escriben, poniendo $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, y para ciertas funciones $f(x)$ particulares:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)y\,dt,$$

y, en Gregory ([*136* d], p. 489), para una curva $y = f(x)$ y su arco s, $\int y\,ds = \int z\,dx$, siendo $z = y\sqrt{1 + y'^2}$. Hasta 1669 no vemos a Barrow en posesión del teorema general del cambio de variables ([*16* b], pp. 298-299), y su enunciado, como siempre geométrico, se reduce a lo siguiente: sean x e y ligadas por una relación monótona, y sea p la pendiente de la gráfica de esta relación en el punto (x, y), entonces, si las funciones $f(x)$ y $g(y)$ son tales que se tenga $f(x)/g(y) = p$, para todo par de valores correspondientes (x, y), las áreas $\int f(x)dx$ y $\int g(y)dy$, tomadas entre los límites correspondientes, son iguales; recíprocamente, si estas áreas son siempre iguales (suponiendo implícitamente que f y g sean de signo constante), se tiene $p = f(x)/g(y)$, esta recíproca sirve naturalmente para

aplicar el teorema a la resolución de ecuaciones diferenciales (por «separación de variables»). Pero dicho teorema solamente es incluido por Barrow en un apéndice (Lect. XII, ap. III, teor. IV) en el que, haciendo observar que muchos de los resultados anteriores no son más que casos particulares de él, pide disculpas por haberlo descubierto demasiado tarde y no haber podido hacer más uso de dicho resultado.

Así pues, la situación hacia 1670 es la siguiente. Se sabe tratar mediante procedimientos uniformes los problemas relativos a la derivada primera, y Huygens ha abordado cuestiones geométricas relativas a la derivada segunda. Se sabe reducir todos los problemas de integración a cuadraturas, se está en posesión de técnicas variadas, de naturaleza geométrica, para reducir unas cuadraturas a otras, en los casos mal clasificados, y ya se tiene la costumbre, desde este punto de vista, de manejar las funciones circulares y logarítmica; se ha tomado conciencia de la relación entre diferenciación e integración; se ha comenzado a abordar el «método inverso de las tangentes», que es el nombre dado en esta época a los problemas que se reducen a ecuaciones diferenciales de primer orden. El sensacional descubrimiento de la serie $\log(1 + x) = -\sum_1^{\infty} (-x)^n/n$ por Mercator abre perspectivas completamente nuevas sobre las aplicaciones de las series, y fundamentalmente de las series de potencias, a los problemas denominados «imposibles». En revancha, las filas de los matemáticos se aclaran considerablemente: Barrow cambia el sillón de profesor por el púlpito de predicador, y dejando aparte a Huygens (que ha realizado ya casi toda su obra matemática, habiendo obtenido todos los resultados importantes de su *Horologium Oscillatorum*, que se dispone a redactar definitivamente), los únicos matemáticos activos son Newton en Cambridge, y J. Gregory aislado en Aberdeen, a los que pronto se unirá Leibniz con un ardor de neófito. Los tres, Newton a partir de 1665, Gregory a partir de la publicación de Mercator de 1668, y Leibniz a partir más o menos de 1673, se consagran fundamentalmente al estudio del tema de moda, las series de potencias. Pero, desde el punto de vista de la clasificación de los problemas, el efecto principal de los nuevos métodos parece haber sido el de suprimir toda distinción entre ellos; en efecto, Newton, más analista que algebrista, no duda en anunciar

a Leibniz en 1676 ([*198* d], p. 224) que sabe resolver todas las ecuaciones diferenciales[8], a lo que responde Leibniz ([*198* d], pp. 248-249) que de lo que se trata es por el contrario de obtener siempre que se pueda la solución en términos finitos «suponiendo las cuadraturas», y también de saber si toda cuadratura puede reducirse a las del círculo y la hipérbola como se ha constatado en la mayor parte de los casos considerados; a este propósito recuerda que Gregory creía (con razón, como sabemos hoy) que la rectificación de la elipse y de la hipérbola eran irreducibles a las cuadraturas del círculo y de la hipérbola, y Leibniz se pregunta hasta qué punto el método de las series, tal y como Newton lo emplea, puede dar la respuesta a estas cuestiones. Por su parte, Newton se declara en posesión de criterios ([*198* d], pp. 209-211), que no indica, para decidir, en apariencia a partir del examen de las series, acerca de la «posibilidad» de ciertas cuadraturas (en términos finitos) y da como ejemplo (muy interesante) una serie para la integral $\int x^{\alpha}(1 + x)^{\beta}dx$.

Vemos así el inmenso progreso que se ha realizado en menos de diez años: las cuestiones de clasificación se plantean ya en estas cartas en términos completamente modernos; si uno de los problemas planteados por Leibniz ha sido resuelto en el siglo XIX por la teoría de las integrales abelianas, el otro, acerca de la posibilidad de reducir a cuadraturas una ecuación diferencial dada, permanece todavía abierto, a pesar de algunos trabajos recientes importantes. Si esto es así se debe a que Newton y Leibniz, cada uno por su lado, redujeron a un algoritmo las operaciones fundamentales del cálculo infinitesimal; basta con escribir, en las notaciones de que se sirven uno y otro, un problema de cuadratura o una ecuación diferencial para que aparezca inmediatamente su estructura algebraica, separada de su ganga geométrica; los métodos de «trasmutación» se escriben igualmente en términos analíticos simples, los problemas de clasificación se plantean de modo preciso. Matemáticamente hablando, el siglo XVII ha terminado.

[8] A lo largo de este intercambio de cartas, que no se hace directamente entre los interesados, sino oficialmente por intermedio del secretario de la Royal Society, Newton «se adelanta» enunciando su método como sigue: *5accdae 10effh 12i... rrrsssssttuu*, anagrama en el que se encierra el método de resolución por medio de una serie de potencias con coeficientes indeterminados ([*198* d], p. 224).

E) *Interpolación y cálculo de diferencias.* Este tema (del que no separaremos el estudio de los *coeficientes del binomio*) aparece muy pronto, y se continúa a lo largo de todo el siglo en virtud de razones teóricas y prácticas a la vez. En efecto, una de las grandes tareas de la época es el cálculo de tablas trigonométricas, logarítmicas y náuticas, que se habían hecho necesarias a causa de los rápidos progresos de la geografía, de la navegación, de la astronomía teórica y práctica, de la física y de la mecánica celeste, y muchos de los matemáticos más eminentes, desde Kepler hasta Huygens y Newton, toman parte en ella, bien sea directamente, bien sea mediante la investigación teórica de los procedimientos de aproximación más eficaces.

Uno de los primeros problemas en el uso e incluso en la confección de las tablas es el de la interpolación, y, a medida que va creciendo la precisión de los cálculos, se va observando en el siglo XVII que el antiguo procedimiento de la interpolación lineal pierde su validez desde el momento en que las diferencias primeras (diferencias entre los valores sucesivos que aparecen en la tabla) dejan de ser sensiblemente constantes, así vemos cómo Briggs, por ejemplo ([*36*], cap. 13), hace uso de las diferencias de órdenes superiores, e incluso de orden bastante elevado, en el cálculo de los logaritmos. Después vemos a Newton ([*233* a], t. I, pp. 271-282 y [*233* b], libro III, lema 5; véase también [*114*]) y J. Gregory ([*136* d], pp. 119-120), cada uno por su lado, realizar paralelamente investigaciones sobre la interpolación y las series de potencias, y ambos llegan, por métodos además bastante diferentes, por una parte a la fórmula de interpolación por polinomios llamada «de Newton», y por otra a la serie binómica ([*136* d], p. 131; [*198* d], p. 180), y a los principales desarrollos en series de potencias del análisis clásico ([*136* d]; [*233* a], t. I, pp. 3-26 y 271-282 y [*198* d], pp. 179-192 y 203-225); es indudable que estos dos tipos de trabajos se han influido mutuamente, y es también indudable que estuvieron ligados en la mente de Newton al descubrimiento de los principios del cálculo infinitesimal. Tanto en Newton como en Gregory existe una gran preocupación por la práctica numérica, por la construcción y el uso de tablas, por el cálculo numérico de las series e integrales; en particular, aunque

no aparezca en ellos ninguna demostración cuidada de convergencia, del estilo de la de Lord Brouncker más arriba citada, ambos se refieren constantemente a la convergencia de sus series desde el punto de vista práctico de su adecuación para el cálculo. Así es como vemos a Newton, en respuesta a una cuestión planteada por Collins con fines prácticos ([*262*], t. II, pp. 309-310), aplicar al cálculo aproximado de $\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{n+p}$, para valores grandes de N, un caso particular del método de sumación llamado de Euler-Maclaurin.

Aparece también muy pronto el problema del cálculo de los valores de una función a partir de sus diferencias, empleado como procedimiento práctico de integración, e incluso, puede decirse, de integración de una ecuación diferencial. Así Wright, en 1599, teniendo que resolver con vistas a unas tablas náuticas un problema que nosotros enunciaríamos $\frac{dx}{dt} = \sec t = \frac{1}{\cos t}$, procede por adición de valores de $\sec t$, según intervalos sucesivos de un segundo de arco ([*338*]; cf. [*230* b], p. 97), obteniendo de modo natural algo muy parecido a una tabla de valores de $\log tg(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2})$, y esta coincidencia, ya observada desde el cálculo de las primeras tablas de $\log tg\ t$, no fue explicada hasta la integración de $\sec t$ por Gregory en 1668 ([*136* c] y [*136* d], pp. 7 y 463).

Pero estas cuestiones tienen también un aspecto puramente teórico e incluso aritmético. Convengamos en designar por $\Delta^r x_n$ las sucesiones de diferencias sucesivas de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, definidas por recurrencia mediante la fórmula $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, $\Delta^r x_n = \Delta(\Delta^{r-1} x_n)$, y emplear la notación S^r para la operación inversa de Δ y de sus iteradas, poniendo entonces $y_n = Sx_n$ si $y_0 = 0$, $\Delta y_n = x_n$, y $S^r x_n = S(S^{r-1} x_n)$, se tiene

$$S^r x_n = \sum_{p=0}^{n-r} \binom{n-p-1}{r-1} x_p;$$

en particular, si $x_n = 1$, para todo n, se tiene $Sx_n = n$, las sucesiones $S^2 x_n$ y $S^3 x_n$ son las de los números «triangulares» y «piramidales», ya estudiadas por los aritméticos griegos, y se tiene en general

$$S^r x_n = \binom{n}{r} \text{ para } n \geq r \text{ (y } S^r x_n = 0 \text{ para } n < r);$$

habiéndose introducido estas sucesiones, desde este punto de vista, en todo caso en el siglo XVI; aparecen también de un modo natural en los problemas combinatorios, que, bien sea por sí mismos, bien sea a propósito de las probabilidades, desempeñaron un papel bastante importante en las matemáticas del siglo XVII, en Fermat y Pascal por ejemplo, y más tarde en Leibniz. Se presentan también en la expresión de la suma de las potencias m-ésimas de los N primeros enteros, cuyo cálculo, como hemos visto, es la base de la integración de $\int x^m dx$ para m entero, según el primer método de Fermat ([*109*], t. II, p. 83). Así procede también Wallis en su *Arithmetica Infinitorum* (Aritmética de los infinitos) ([*326* a], t. I, pp. 355-478), sin conocer los trabajos (no publicados) de Fermat, y sin tener otro conocimiento (según nos dice) del método de los indivisibles aparte de la lectura de Torricelli; bien es cierto que Wallis, muy presuroso de llegar al final, no se detiene en un trabajo minucioso: una vez obtenido el resultado para los primeros valores enteros de m, lo da como cierto «por inducción» para todo m entero, y pasa correctamente desde aquí a $m = 1/n$ para n entero, y después, por medio de una «inducción» aún más sumaria que la primera, a m racional cualquiera. Pero en lo que radica el interés y la originalidad de su trabajo es en remontarse progresivamente a partir de aquí al estudio de la integral «euleriana» $I(m, n) = \int_0^1 (1 - x^{\frac{1}{m}})^n dx$ (cuyo valor, para m y $n > 0$ es $\Gamma(m+1)\Gamma n + 1)/\Gamma(m+n+1)$), y otras parecidas, construye, para m y n enteros, la tabla de valores de $1/I(m, n)$, que no es otra cosa que la de los enteros $\binom{m+n}{n}$ y, siguiendo métodos casi análogos a los que se siguen hoy día para exponer la teoría de la función Γ, llega a un producto infinito para

$I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}=\left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2$; por otra parte no es difícil convertir su método en uno correcto por medio de integraciones por partes y de cambios de variable muy sencillos, y de la consideración de $I(m, n)$ para todos los valores reales de m y n, en lo que no se podía pensar mucho entonces, pero que el análisis newtoniano iba a hacer posible enseguida. En todo caso, la «interpolación» realizada por Wallis de los enteros $\binom{m+n}{n}$ con valores no enteros de m (más exactamente con valores de la forma $n = p/2$, siendo p entero impar) sirve de punto de partida al joven Newton ([*198* d], pp. 204-206), llevándole, en primer lugar, con el estudio del caso particular $(1-x^2)^{p/2}$ a la serie binómica, y luego de aquí a la introducción de x^a (con esta notación) para todo a real, y a la diferenciación de x^a mediante la serie binómica, y todo esto realizado sin grandes esfuerzos para obtener demostraciones, ni siquiera definiciones rigurosas; además, y esto es una innovación notable, del conocimiento de la derivada de x^a deduce $\int x^a dx$ para $a \neq -1$ ([*233* a], t. I, pp. 3-26 y [*198* d], p. 225). Además, aunque muy pronto estuviese en posesión de métodos mucho más generales de desarrollo en serie de potencias, como el llamado del polígono de Newton (para las funciones algebraicas) ([*198* d], p. 221) y el de los coeficientes indeterminados, vuelve numerosas veces en sus trabajos posteriores, con una especie de predilección, a la serie binómica y a sus generalizaciones, y a partir de aquí, por ejemplo, parece haber obtenido el desarrollo de $\int x^\alpha(1+x)^\beta dx$, del que nos hemos ocupado más arriba ([*198* d], p. 209).

Sin embargo, la evolución de las ideas en el continente es muy diferente y mucho más abstracta. Pascal había coincidido con Fermat en el estudio de los coeficientes del binomio (donde forma lo que él llama «triángulo aritmético») y su uso en el cálculo de probabilidades y en el cálculo de diferencias, y al abordar la integración introduce las mismas ideas. Al igual que sus predecesores, cuando emplea el lenguaje de los indivisibles, considera la integral $F(x) = \int_0^x f(x)dx$ como el valor de la razón de la «suma de todas las ordenadas de la curva»

$$S\left(f\left(\frac{n}{N}\right)\right)=\sum_{0<p<Nx} f\left(\frac{p}{N}\right),$$

con la «unidad» $N = \sum_{0\leqslant p<N} 1$ para $N = \infty$ ([*244*], t. VIII, pp. 352-355), o bien, cuando abandona este lenguaje por el lenguaje correcto de la «exhaustión», como el límite de esta razón cuando N crece indefinidamente. Pero, teniendo presentes problemas de momentos, observa que, cuando se trata de masas discretas, y_i repartidas según intervalos equidistantes, el cálculo de la masa total se reduce a la operación Sy_n definida más arriba, y el cálculo del momento a la operación S^2y_n, e itera por analogía la operación $\int$ para formar lo que llama las «sumas triangulares de las ordenadas», es decir, en nuestro lenguaje, los límites de las sumas $N^{-2}S^2\left(f\left(\frac{n}{N}\right)\right)$, es decir, las integrales $F_2(x)=\int_0^x F(x)dx$; una nueva iteración le proporciona las «sumas piramidales» $F_3(x)=\int_0^x F_2(x)dx$, límites de $N^{-3}S^3\left(f\left(\frac{n}{N}\right)\right)$; el contexto señala además con toda claridad que si se detiene aquí no es a causa de una falta de generalidad en su pensamiento ni en su lenguaje, sino solamente porque no piensa utilizar más que las anteriores, cuyo empleo sistemático está en la base de una buena parte de sus resultados, y de las que demuestra muy pronto las propiedades que nosotros escribiríamos

$$F_2(x)=\int_0^x (x-u)f(u)du, \quad F_3(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x-u)^2 f(u)du$$

([*244*], t. VIII, pp. 361-367), y todo esto sin escribir una sola fórmula,

pero en un lenguaje tan transparente y preciso que puede transcribirse inmediatamente en fórmulas tal y como acabamos de hacer. En Pascal, al igual que en sus predecesores, pero de una forma mucho más clara y sistemática, la elección de la variable independiente (que es siempre unas de las coordenadas, o bien el arco sobre la curva) está implícita en el convenio que hace que los puntos de subdivisión sean equidistantes (aunque «infinitamente próximos») sobre el intervalo de integración; según los casos, estos puntos están situados bien sobre el Ox, bien sobre el eje Oy, o bien sobre el arco de curva, y Pascal tiene buen cuidado de no dar lugar a ninguna ambigüedad sobre este punto ([*244*], t. VIII, pp. 368-369). Cuando tiene que hacer un cambio de variable lo hace siguiendo un principio que viene a decir que el área $\int f(x)dx$ puede escribirse en la forma $S(f(x_i)\Delta x_i)$ para toda subdivisión del intervalo de integración en intervalos «infinitamente pequeños» Δx_i, iguales o no ([*244*], t. IX, pp. 61-68).

Como se ve, estamos ya muy cerca de Leibniz, y podemos decir que fue una feliz casualidad el que éste, cuando quiso iniciarse en las matemáticas modernas, encontrase a Huygens, que le puso inmediatamente entre las manos los escritos de Pascal ([*198* d], pp. 407-408); Leibniz estaba particularmente preparado para ellos por sus reflexiones sobre el análisis combinatorio, y sabemos que los estudió atentamente, lo que se refleja en su obra. En 1675 le vemos transcribir el teorema de Pascal arriba citado en la forma $\text{omn}(x\omega) = x\,.\,\text{omn}\ \omega - \text{omn}(\text{omn}\ \omega)$, donde omn es una abreviatura para la integral de ω tomada desde 0 hasta x, que Leibniz, algunos días después, sustituye por $\int \omega$ (inicial de «suma omnium ω») a la vez que introduce d para la «diferencia» infinitamente pequeña o, como dirá enseguida, la diferencial ([*198* d], pp. 147-167). Considerando estas «diferencias» como magnitudes comparables entre sí pero no con las magnitudes finitas, toma además casi siempre, explícitamente o no, la diferencial dx de la variable independiente x como unidad, $dx = 1$ $\left(\right.$lo que es equivalente a identificar la diferencial dy con la derivada $\left.\frac{dy}{dx}\right)$, y la omite al principio en su notación de la integral, que aparece como $\int y$ más bien que como $\int ydx$, pero no tarda mucho en introducirla, y continúa haciéndolo sistemáticamente una vez que se da cuenta de su carácter invariante respecto a la elección de la variable independiente, lo que le dispensa de tener siempre presente dicha elección en su mente[9], y muestra no poca satisfacción cuando al volver al estudio de Barrow, que había dejado de lado hasta entonces, encuentra que el teorema del cambio de variables, al que tanta importancia daba Barrow, se obtiene inmediatamente con su propia notación ([*198* d], p. 412). Además, mientras lleva a cabo todo esto, se mantiene muy cerca del cálculo de diferencias, del que su cálculo diferencial se deduce mediante un paso al límite que sería desde luego bastante trabajoso de justificar rigurosamente, y en la continuación insiste complacido en el hecho de que sus principios se aplican indiferentemente a uno y otro. Por ejemplo, cita expresamente a Pascal, cuando en su correspondencia con Juan Bernouilli ([*198* a], t. III, p. 156), refiriéndose a sus primeros trabajos, da una fórmula de cálculo de diferencias que es un caso particular de la de Newton, y deduce de ella por «paso al límite» la fórmula $y = \sum_{1}^{\infty}(-1)^n \frac{d^n y}{dx^n} \cdot \frac{x^n}{n!}$ (donde y es una función que se anula para $x = 0$, y las $\frac{d^n y}{dx^n}$ son sus derivadas para el valor x de la variable), fórmula equivalente a una semejante que Bernoulli acaba de comunicarle ([*198* a], t. III, p. 150 y [*20* a], t. I, pp. 125-128) y que éste demuestra mediante integraciones por partes sucesivas. Esta fórmula, como vemos, se parece mucho a la serie de Taylor, y es este mismo razonamiento de Leibniz, por paso al límite a partir del cálculo de diferencias, el que Taylor vuelve a encontrar en

[9] *«Advertí que se tuviese cuidado de no omitir dx..., falta cometida frecuentemente, y que impide seguir adelante, debido al hecho de que de este modo se quita a estos indivisibles, como aquí dx, su generalidad... de la que nacen innumerables transfiguraciones y equipolencias de figuras»* ([*198* a], t. V, p. 233).

1715 para obtener «su» serie [*305*][10], sin hacer por otra parte gran uso de ella.

F) Se habrá observado ya, contenida implícitamente en la evolución descrita más arriba, la *algebrización* progresiva del Análisis infinitesimal, es decir, su reducción a un *cálculo operacional* dotado de un sistema uniforme de notación de carácter algebraico. Como había indicado muchas veces Leibniz con toda claridad ([*198* a], t. V, pp. 230-233), se trataba de hacer con el nuevo análisis lo mismo que había hecho Viète con la teoría de las ecuaciones, y Descartes con la geometría. Para comprender su necesidad basta con leer algunas páginas de Barrow; nunca dejamos de tener ante los ojos una figura, a veces complicada, descrita previamente con toda minuciosidad; en las 100 páginas (Lect. V-XII) que forman lo esencial de la obra hay no menos de 180 figuras.

Es cierto que no podía hablarse mucho de la algebrización mientras no apareciese alguna unidad a través de la multiplicidad de las apariencias geométricas. Sin embargo, Gregorio de Saint-Vincent introduce ya [*135*], con el nombre de «*ductus plani in planum*», una especie de ley de composición que viene a reducirse al empleo sistemático de integrales $\int_a^b f(x)g(x)dx$ consideradas como volúmenes de sólidos $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$, $0 \leq z \leq g(x)$, pero está muy lejos de obtener las consecuencias que deduce Pascal, como hemos visto, del estudio del mismo sólido. Wallis, en 1655, y Pascal, en 1658, fabrican, cada uno a su manera, lenguajes de carácter algebraico en los que, sin escribir ninguna fórmula, redactan enunciados que pueden transcribirse inmediatamente en fórmulas de Cálculo integral una vez que se ha comprendido el mecanismo. El lenguaje

[10] Para el cálculo de las diferencias, Taylor podía naturalmente apoyarse en los resultados de Newton, contenidos en un famoso lema de los *Principia* ([*233* b], Libro III, lema 5) y publicados más ampliamente en 1711 ([*233* a], t. I, pp. 271-282). En cuanto a la idea de pasar al límite, parece típicamente leibniziana, y costaría trabajo creer en la originalidad de Taylor sobre este punto si no se hubiese conocido en toda época numerosos ejemplos de discípulos ignorantes de todo excepto de los escritos de su maestro y amo. Taylor no cita ni a Leibniz ni a Bernoulli, pero la controversia Newton-Leibniz estaba al rojo vivo; Taylor era secretario de la Royal Society y Sir Isaac era su todopoderoso presidente.

de Pascal es especialmente claro y preciso, y aunque no se comprenda muy bien por qué se niega a usar notaciones algebraicas, no ya la de Descartes, sino también la de Viète, no se puede por menos de admirar la proeza realizada, que solo su dominio de la lengua le ha permitido llevar a cabo.

Pero dejemos pasar algunos años, y todo cambiará de aspecto. Newton es el primero en concebir la idea de remplazar todas las operaciones, de carácter geométrico, del Análisis infinitesimal contemporáneo, por una única operación analítica, la diferenciación, y por la resolución del problema inverso, operación que desde luego el método de las series de potencias le permitía realizar con toda facilidad. Basando su lenguaje, como hemos visto, en la ficción de un parámetro «temporal» universal, llama «fluyentes» a las cantidades variables en función de este parámetro, y «fluxiones» a sus derivadas. Newton no parece haber dado una importancia especial a las notaciones, e incluso más tarde sus fanáticos se vanaglorian de la carencia de una notación sistemática; sin embargo, él mismo toma desde el principio, para su uso personal, la costumbre de designar la fluxión por un punto, es decir, $\frac{dx}{dt}$ por $\dot{x}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ por $\ddot{x}$, etc. En lo que se refiere a la integración, parece como si Newton, al igual que Barrow, no la hubiese considerado nunca más que como un problema (hallar la fluyente conociendo la fluxión, es decir, resolver $\dot{x} = f(t)$), y no como una operación; tampoco emplea ningún nombre para la integral ni, a lo que parece, ninguna notación habitual (excepto algunas veces un cuadrado $\boxed{f(t)}$ o $\Box f(t)$ para $\int f(t)dt$). ¿Es esto debido a que le repugne dar un nombre y un signo a un ente que no está definido de una manera unívoca, sino solamente salvo una constante aditiva? A falta de un texto, lo único que puede hacerse es plantear la cuestión.

Todo lo que tiene Newton de empírico, de concreto, de circunspecto en sus mayores atrevimientos, lo tiene Leibniz de sistemático, de generalizador, de innovador aventurado y a veces temerario. Desde su juventud tuvo ya en la cabeza la idea de una «característica» o lenguaje simbólico universal, que sería respecto al conjunto del pensamiento humano lo que es la notación algebraica respecto del

álgebra, en el que todo nombre o todo signo fuese la llave de todas las cualidades de la cosa significada, y que no pudiese emplearse correctamente sin tener que razonar correctamente por ello (ver p. 19). Resulta muy fácil considerar un proyecto de este tipo como quimérico, sin embargo, no es una casualidad que su autor fuese la misma persona que debía reconocer y aislar los conceptos fundamentales del Cálculo infinitesimal y le dotase de notaciones más o menos definitivas. Hemos asistido más arriba al nacimiento de éstas, y hemos observado el cuidado con el que Leibniz, que parece consciente de su misión, va modificándolas progresivamente hasta darles la sencillez y sobre todo la invariancia que va buscando ([*198* a], t. V, pp. 220-226 y 226-233). Es importante señalar aquí que, desde el momento en que las introduce (sin saber nada todavía de las ideas de Newton), tiene la concepción clara de $\int$ y de d, de la integral y de la diferencial, como operadores inversos uno del otro. Desde luego, al proceder así no puede evitar la ambigüedad inherente a la integral indefinida, que es el punto débil de su sistema, en el que se mueve con habilidad, al igual que sus sucesores. Pero lo que sorprende desde la primera aparición de los nuevos símbolos, es el ver que Leibniz se preocupa enseguida de formular sus reglas de empleo, se pregunta si $d(xy) = dxdy$ ([*198* d], pp. 165-166) y se contesta negativamente, hasta llegar progresivamente a la fórmula correcta ([*198* a], t. V, pp. 220-226), que más tarde generalizaría con su famosa fórmula para $d^n(xy)$ ([*198* a], t. III, p. 175). Desde luego, en tanto que Leibniz realiza estos tanteos, Newton hace ya diez años que sabe que $z = xy$ implica $\dot{z} = \dot{x}y + x\dot{y}$, pero no se molesta nunca en decirlo, considerándolo como un caso particular, indigno de ser mencionado, de su regla para diferenciar una relación $F(x, y, z) = 0$ entre fluyentes. Por el contrario, la principal preocupación de Leibniz no es la de emplear tales métodos en la resolución de problemas concretos, ni tampoco la de deducirlos a partir de principios rigurosos e inatacables, sino ante todo el de construir un algoritmo basado en el manejo formal de ciertas reglas simples. Esto le lleva a mejorar la notación algebraica mediante el empleo de paréntesis, a adoptar progresivamente la notación log x o lx para el logaritmo [11] y a insistir sobre

[11] Pero no tiene ningún signo para las funciones trigonométricas, ni (a falta de un símbolo para e) para el «número cuyo logaritmo es x».

el «cálculo exponencial», es decir, la consideración sistemática de las exponenciales a^x, x^x, x^y en las que el exponente es una variable. Sobre todo, en tanto que Newton introduce las fluxiones de orden superior solamente en la estricta medida en que le son necesarias en cada caso concreto, Leibniz se orienta inmediatamente hacia la creación de un «cálculo operacional» mediante la iteración de d y de $\int$.

Tomando, poco a poco, clara conciencia de la analogía entre la multiplicación de números y la composición de operadores de su cálculo, adopta, atrevida y acertadamente, la notación exponencial para escribir las iteradas de d, escribiendo, por tanto, d^n para la iterada *n-ésima* ([*198* d], pp. 595 y 601 [12], y [*198* a], t. V, pp. 221 y 378) e incluso d^{-1} y d^{-n} para $\int$ y sus iteradas ([*198* a], t. III, p. 167); incluso intenta dar un sentido a d^α para α real cualquiera ([*198* a], t. II, pp. 301-302 y t. III, p. 228).

Esto no quiere decir que Leibniz no se interese por las aplicaciones de su cálculo, sabiendo muy bien (como repite a menudo Huygens ([*198* d], p. 599)) que constituyen su piedra de toque, pero carece de paciencia para profundizar en ellas, y busca, sobre todo, las ocasiones que le permitan formular nuevas reglas generales. A esto se debe el que, en 1686 ([*198* a], t. VII, pp. 326-329) se preocupe de la curvatura de las curvas y del círculo osculador, para llegar, en 1692 ([*198* a], t. VII, pp. 331-337), a los principios generales relativos al contacto de las curvas planas [13]; en 1692 ([*198* a], t. V, pp. 266-269)

[12] *«...es más o menos como si, en vez de las raíces y potencias, se quisieran sustituir siempre letras, y en vez de xx, o x³, poner m o n, después de haber declarado que estas deben ser las potencias de la magnitud x. Juzgad, señores, lo molesto que esto resultaría. Lo mismo sucede con dx o ddx, y las diferencias son afecciones de magnitudes indeterminadas en sus lugares de la misma manera que las potencias son afecciones de una magnitud tomada separadamente. Me parece pues que es mucho más natural designarlas de tal modo que se conozca inmediatamente la magnitud cuyas afecciones constituyen.»*

[13] Aquí comete en primer lugar un error singular, al creer que el «círculo que besa» (el círculo osculador) tiene en el punto de contacto cuatro puntos comunes con la curva, y le cuesta mucho trabajo aceptar más tarde las objeciones de los hermanos Bernoulli sobre este tema ([*198* a], t. III, pp. 187-188, 201-202 y 207).

y 1694 ([*198* a], t. V, pp. 301-306), sienta las bases de la teoría de las envolventes; en 1702 y 1703, juntamente con Juan Bernoulli, lleva a cabo la integración de las fracciones racionales por descomposición en elementos simples, pero al principio de una manera formal y sin darse bien cuenta de las circunstancias que acompañan la presencia de factores lineales complejos en el denominador ([*198* a], t. V, pp. 350-366). A esto se debe también el que un día de agosto de 1697, meditando en un viaje en coche acerca de problemas del cálculo de variaciones, tenga la idea de la regla de diferenciación respecto a un parámetro bajo el signo $\int$, y, entusiasmado, se la envía inmediatamente a Bernoulli ([*198* a], t. III, pp. 449-454). Pero, cuando él llega aquí, los principios fundamentales de su cálculo han sido aceptados hace tiempo, y su uso ha empezado a extenderse: la algebrización del Análisis infinitesimal ya se ha realizado.

G) La noción de *función* es introducida y precisada de muchas maneras a lo largo del siglo XVII. Toda cinemática se basa en una idea intuitiva, y de algún modo experimental, de las cantidades variables con el tiempo, es decir, de funciones del tiempo, y ya hemos visto cómo se llega así a la función de un parámetro, tal como aparece en Barrow, y, con el nombre de fluyente, en Newton. La noción de «curva cualquiera» aparece a menudo, pero no se precisa casi nunca; puede que se haya concebido muchas veces en forma cinemática o en todo caso experimental, y sin que se considerase necesario que una curva fuese susceptible de una caracterización geométrica o analítica para poder ser objeto de razonamientos. Así sucede, en particular (por razones que podemos comprender hoy mejor), cuando se trata de la integración, por ejemplo, en Cavalieri, Pascal y Barrow; este último, razonando sobre la curva definida por $x = ct$, $y = f(t)$ con la hipótesis de que $\frac{dy}{dt}$ sea creciente, dice, incluso, expresamente que «*no importa nada*» que $\frac{dy}{dt}$ crezca «*regularmente siguiendo una ley cualquiera, o bien irregularmente*» ([*16* b], p. 191), es decir, según diríamos nosotros, según sea o no susceptible de una definición analítica. Desgraciadamente, esta idea clara y fecunda, que debía, convenientemente precisada, volver a aparecer en el siglo XIX, no podía luchar entonces contra la confusión creada por Descartes, cuando éste había, en primer lugar, expulsado de la «geometría» todas las curvas no susceptibles de una definición analítica precisa, y, en segundo lugar, restringido únicamente a las operaciones algebraicas los procedimientos de formación admisibles en tal definición. Es cierto que, en este último punto, no fue seguido por la mayoría de sus contemporáneos; poco a poco, y a veces por caminos muy indirectos, diversas operaciones trascendentes, el logaritmo, la exponencial, las funciones trigonométricas, las cuadraturas, la resolución de ecuaciones diferenciales, el paso al límite, la sumación de series, van adquiriendo el derecho de ciudadanía, sin que sea fácil para cada una de ellas indicar el momento preciso en que se da el paso adelante; además, el primer paso hacia adelante es seguido a menudo de otro hacia atrás. En lo que se refiere al logaritmo, por ejemplo, deben considerarse como etapas importantes la aparición de la curva logarítmica ($y = a^x$ o $y = \log x$, según la elección de los ejes), la de la espiral logarítmica, la cuadratura de la hipérbola, el desarrollo en serie de $\log(1 + x)$, e incluso la adopción del símbolo $\log x$ o lx. En lo que se refiere a las funciones trigonométricas, y aunque se remonten a la antigüedad en cierto sentido, es interesante señalar que la sinusoide no aparece al principio como definida por una ecuación $y = \operatorname{sen} x$, sino más bien, en Roberval ([*263*], pp. 63-65), como «acompañante de la ruleta» (en concreto, se trata de la curva

$$y = \mathrm{R}\left(1 - \cos\frac{x}{\mathrm{R}}\right),$$

es decir, como curva auxiliar cuya definición se deduce a partir de la cicloide. Para encontrar la noción general de expresión analítica hay que llegar hasta Gregory, que la define, en 1667 ([*169* a], p. 413), como una cantidad que se obtiene a partir de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas «*o de cualquier otra operación imaginable*», e intenta precisar esta noción en su prefacio ([*169* a], pp. 408-409), explicando la necesidad de añadir a las cinco operaciones del álgebra [14] una sexta operación, que no es otra cosa

[14] Se trata de las cuatro operaciones racionales y de la extracción de raíces de orden cualquiera; J. Gregory no dejó nunca de creer en la posibilidad de resolver por radicales las ecuaciones de todos los grados.

en definitiva que el paso al límite. Pero estas interesantes reflexiones son olvidadas enseguida, sumergidas en el torrente de desarrollos en serie descubiertos por el mismo Gregory, Newton y otros, y el gran éxito de este último método dio lugar a una confusión bastante duradera entre funciones susceptibles de definición analítica y funciones desarrollables en serie de potencias.

En cuanto a Leibniz, parece haberse mantenido en el punto de vista cartesiano, ampliado al añadir explícitamente las cuadraturas, y también al añadir implícitamente otras operaciones corrientes en el análisis de su época, como la sumación de series de potencias o la resolución de ecuaciones diferenciales. Igualmente, Juan Bernoulli, cuando quiere considerar una función arbitraria de x, la introduce como «*una cantidad formada de una manera cualquiera a partir de* x *y de constantes*» ([*198* a], t. III, p. 150), precisando a veces que se trata de una cantidad formada «*de una manera algebraica o trascendente*» ([*198* a], t. III, p. 324), y, en 1698, se pone de acuerdo con Leibniz para dar a esta cantidad el nombre de «función de x» ([*198* a], t. III, pp. 507-510 y 525-526)[15]. Leibniz había introducido ya los términos «constante», «variable» y «parámetro», y a propósito de las envolventes había precisado la noción de familia de curvas dependiente de uno o varios parámetros ([*198* a], t. V, pp. 266-269). Las cuestiones de notación se precisan también en la correspondencia con Juan Bernoulli: éste escribe muchas veces X, o ξ, para una función arbitraria de x ([*198* a], t. III, p. 531); Leibniz lo aprueba, pero propone también $\overline{x}\lfloor 1 \rfloor$, $\overline{x}\lfloor 2 \rfloor$ donde nosotros escribiríamos $f_1(x)$, $f_2(x)$, y propone para la derivada $\frac{dz}{dx}$ de una función z de x la notación $đz$ (por oposición a dz que es la diferencial) mientras que Bernoulli escribe Δz ([*198* a], t. III, pp. 537 y 526).

De este modo, con el siglo, termina la época heroica. El nuevo

[15] Hasta aquí y ya en un manuscrito de 1673, Leibniz había empleado esta palabra como una abreviatura para designar una magnitud «cumpliendo tal o cual función» respecto a una curva, por ejemplo la longitud de la tangente o de la normal (limitada por la curva y por Ox), o bien la subnormal, la subtangente, etc... en suma una función de un punto variable sobre una curva, definida de un modo geométrico-diferencial. En el mismo manuscrito de 1673, la curva se supone definida por una relación entre x e y «*dada por una ecuación*» (es decir, en nuestro lenguaje, algebraica) (cf. [*217*]).

cálculo, con sus nociones y sus notaciones, queda constituido en la forma que le había dado Leibniz. Los primeros discípulos, Jacobo y Juan Bernoulli, rivalizan en descubrimientos con el maestro, explorando ampliamente los ricos filones cuyo camino les había mostrado. El primer tratado de Cálculo diferencial e integral fue escrito en 1691 y 1692 por Juan Bernoulli[16] para uso de un marqués que resultó ser un buen alumno. Poco importa por otra parte el que Newton se decidiese por fin, en 1693, a publicar parsimoniosamente un breve resumen de sus fluxiones ([*326* a], t. II, pp. 391-396); si en sus *Principia* había materia para alimentar las meditaciones de más de un siglo, en el terreno del Cálculo infinitesimal es alcanzado y, en muchos puntos, superado.

Los puntos débiles del nuevo sistema son además visibles, al menos a nuestros ojos. Newton y Leibniz, suprimiendo de golpe una tradición dos veces milenaria, otorgaron el papel principal a la diferenciación, y redujeron la integración a no ser otra cosa que su inversa; será necesario todo el siglo XIX y una parte del XX para restablecer un justo equilibrio, colocando la integración en la base de la teoría general de las funciones de variable real y sus generalizaciones modernas (ver p. 308). A esta inversión del punto de vista se debe también el papel excesivo y casi exclusivo que toma en Barrow y, sobre todo, a partir de Newton y Leibniz, la integral indefinida a expensas de la integral definida: también aquí el siglo XIX fue el que hubo de poner las cosas en su sitio. Por último, la tendencia propiamente leibniziana al manejo formal de los símbolos debía ir acentuándose a lo largo de todo el siglo XVIII, mucho más allá de lo que podían permitir los recursos del análisis de la época. En particular, hay que reconocer que la noción leibniziana de diferencial no tiene en realidad ningún sentido y a comienzos del siglo XIX cayó en un descrédito del que solo ha ido recuperándose muy poco a poco, y si bien el empleo de las diferenciales primeras ha terminado por ser enteramente justificado, las diferenciales de orden superior, cuyo

[16] La parte de este tratado que se refiere al cálculo integral no fue publicada hasta 1742 ([*20* a], t. III, pp. 385-558 y [*20* b]); la referente al cálculo diferencial no ha sido encontrada y publicada hasta hace poco [*20* c], aunque es cierto que el marqués de l'Hôpital la había publicado en francés, ligeramente modificada, con su propio nombre, por lo que Bernoulli muestra cierta amargura en sus cartas a Leibniz.

empleo es, sin embargo, tan cómodo, no han sido rehabilitadas hasta hoy.

Como quiera que sea, la historia del Cálculo diferencial e integral, a partir de finales del siglo XVII, se divide en dos épocas. Una se relaciona con las aplicaciones de este cálculo, cada vez más ricas, numerosas y variadas. A la Geometría diferencial de las curvas planas, a las ecuaciones diferenciales, a las series de potencias, al cálculo de variaciones, de los que ya hemos hablado más arriba, vienen a unirse la Geometría diferencial de las curvas alabeadas y, después de las superficies, las integrales múltiples, las ecuaciones en derivadas parciales, las series trigonométricas, el estudio de las funciones especiales y otros muchos tipos de problemas. No vamos a ocuparnos aquí de todos estos trabajos, sino sólo de los que han contribuido a poner a punto, profundizar y consolidar, los principios mismos del Cálculo infinitesimal en lo que se refiere a las funciones de una variable real.

Desde este punto de vista, los grandes tratados de mediados del siglo XVIII ofrecen muy pocas novedades. Maclaurin, en Inglaterra [*214*], y Euler, en el Continente ([*108* a] (1), t. X a XIII) permanecen fieles a las tradiciones respectivas de las que son herederos. Es cierto que el primero se esfuerza en aclarar algo las concepciones newtonianas[17], mientras que el segundo, llevando a su extremo el formalismo leibniziano, se contenta, al igual que Leibniz y Taylor, en basar el Cálculo diferencial en un oscuro paso al límite a partir del cálculo de diferencias, cálculo del que da una exposición muy cuidada. Pero, sobre todo, Euler completa la obra de Leibniz introduciendo y haciendo adoptar las notaciones que todavía se emplean hoy para e, i y las funciones trigonométricas, y extendiendo la notación π. Por otra parte, y aunque no hace distinción casi nunca entre funciones y expresiones analíticas, insiste, a propósito de las series trigonométricas y del problema de las cuerdas vibrantes, en la necesidad de no limitarse a las funciones así definidas (y que califica de «continuas»), sino de considerar también, si fuese necesario, funciones arbitrarias o «discontinuas», dadas experimentalmente por uno o

[17] En efecto, éstas necesitaban ser defendidas contra los ataques filosófico-teológico-humorísticos del famoso obispo Berkeley. Según éste, aquél que crea en las fluxiones no deberá encontrar demasiadas dificultades para aceptar los misterios de la religión, argumento *ad hominem* que no carecía de lógica ni de ironía.

varios arcos de curva ([*108* a] (1), t. XXIII, pp. 74-91). Por último, aunque esto se salga en parte de nuestro marco, no es posible dejar de mencionar aquí su extensión de la función exponencial al dominio complejo, a partir de la que obtiene las célebres fórmulas que relacionan la exponencial con las funciones trigonométricas, así como la definición de logaritmo de un número complejo; de este modo, se dilucida definitivamente la famosa analogía entre el logaritmo y las funciones circulares recíprocas, o, en el lenguaje del siglo XVII, entre las cuadraturas del círculo y de la hipérbola, observada ya por Gregorio de Saint-Vincent, precisada por Huygens y, sobre todo, por J. Gregory, y, que en Leibniz y Bernoulli había surgido en la integración formal de

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{i}{2(x+i)} - \frac{i}{2(x-i)}.$$

Sin embargo, d'Alembert, enemigo de toda mística en la matemática como en otras materias, había definido, en artículos importantes ([*75* a], DIFFÉRENTIEL y LÍMITE, y [*75* b]), y con la mayor claridad las nociones de límite y de derivada, y sostenido vehementemente que en el fondo esta es toda la «metafísica» del Cálculo infinitesimal. Pero estos sabios consejos no fueron escuchados inmediatamente. La obra monumental de Lagrange ([*191*], t. IX-X) tiene el significado de un intento de fundar el análisis sobre uno de los conceptos newtonianos más discutibles, aquél que confunde las nociones de función arbitraria y de función desarrollable en serie de potencias, y de obtener a partir de aquí (mediante la consideración del coeficiente del primer término de la serie) la noción de diferenciación. Por supuesto, que un matemático de la talla de Lagrange no podía por menos de obtener con este motivo resultados útiles e importantes, como por ejemplo (y de una manera en realidad independiente del punto de partida que acabamos de indicar) la demostración general de la fórmula de Taylor con la expresión del resto mediante una integral, y su cálculo, según el teorema de la media; además la obra de Lagrange es, en parte, el origen del método de Weierstrass en teoría de funciones de una variable compleja, así como el de la moderna teoría algebraica de las series formales. Pero, desde el punto de vista de su objeto inmediato, representa un retroceso más bien que un avance.

Por el contrario, con las obras de Cauchy para la enseñanza ([*56* a] (2), t. IV) estamos por fin en terreno sólido. Cauchy define esencialmente una función como lo hacemos nosotros hoy, aunque en un lenguaje un poco vago todavía. La noción de límite, fijada de una vez para siempre, se toma como punto de partida, las de función continua (en el sentido moderno) y la de derivada se deducen inmediatamente de ella, así como sus principales propiedades elementales; y la existencia de la derivada, en lugar de ser un artículo de fe, se convierte en una cuestión que ha de estudiarse con los medios comunes del análisis. A decir verdad, Cauchy no se interesa demasiado por ello, y si Bolzano, por otra parte, habiendo llegado por su parte a los mismos principios, construye un ejemplo de función continua sin derivada finita en ningún punto [*27* a], este ejemplo no fue publicado, y la cuestión solamente fue zanjada en público por Weierstrass en un trabajo de 1872 ([*329* a], t. II, pp. 71-74).

En lo que a la integración se refiere, la obra de Cauchy representa una vuelta a las sanas tradiciones de la antigüedad y la primera parte del siglo XVII, pero basada en medios técnicos todavía insuficientes. La integral definida, que se había mantenido largo tiempo en segundo plano, vuelve a ser de nuevo la noción primordial, para la que Cauchy hace adoptar definitivamente la notación $\int_a^b f(x)dx$ propuesta por Fourier (en lugar de la incómoda $\int f(x)dx \begin{bmatrix} x = b \\ x = a \end{bmatrix}$ empleada a veces por Euler), y para definirla vuelve al método «exhaustivo», o como diríamos hoy a las «sumas de Riemann» (que sería mejor llamar sumas de Arquímedes o sumas de Eudoxio). Es cierto, que el siglo XVII no había considerado conveniente someter a un examen crítico la noción de área, que le había parecido al menos tan clara como la de número real inconmensurable; pero la convergencia de las «sumas de Riemann» hacia el área bajo la curva, mientras que se tratase de una curva monótona o monótona a trozos, era una noción familiar a todos los autores preocupados por el rigor del siglo XVII, tales como Fermat, Pascal o Barrow; y J. Gregory, especialmente bien preparado por sus reflexiones sobre el paso al límite y su familiaridad con una

forma ya muy abstracta del principio de los «segmentos encajados», había redactado incluso, según parece, una demostración detallada, que permaneció inédita ([*136* d], pp. 445-446), que hubiese podido servir a Cauchy sin apenas ningún cambio si la hubiera conocido[18]. Desgraciadamente para él, Cauchy pretendía demostrar la existencia de la integral, es decir, la convergencia de las «sumas de Riemann», para una función continua cualquiera, y su demostración, que sería correcta si se apoyase en el teorema de continuidad uniforme de las funciones continuas en un intervalo cerrado, no tiene ningún valor demostrativo a falta de esta noción. Tampoco Dirichlet parece haberse dado cuenta de la dificultad mientras redactaba sus célebres memorias sobre las series trigonométricas, puesto que indica en ellas que el teorema en cuestión es «fácil de demostrar» ([*92*], t. I, p. 136), aunque bien es verdad que lo aplica solamente a funciones acotadas monótonas a trozos. Riemann, más circunspecto, menciona únicamente estas últimas cuando se trata de hacer uso de la condición necesaria y suficiente para la convergencia de las «sumas de Riemann» ([*259* a], pp. 227-271). Una vez establecido el teorema sobre la continuidad uniforme por Heine (cf. p. 200), la cuestión no ofrecía, desde luego, ninguna dificultad, y es resuelta fácilmente por Darboux, en 1875, en su memoria sobre la integración de las funciones discontinuas [*77*], memoria en la que, por otra parte, coincide en muchos puntos con los importantes trabajos de P. du Bois-Reymond, aparecidos hacia la misma época. Simultáneamente se demuestra, por primera vez, pero ésta definitivamente, la linealidad de la integral de funciones continuas. Además, la noción de convergencia uniforme de una serie o de una sucesión, introducida por Seidel entre otros, en 1848, y cuya importancia destacó particularmente Weierstrass (cf. p. 282) había permitido dar una base sólida, es cierto que bajo condiciones un poco restrictivas, a la integración término a término de series y a la diferenciación bajo el signo integral, a la espera de las teorías modernas de las que no vamos a hablar aquí, y que debían iluminar estas cuestiones de una forma provisionalmente definitiva.

[18] Al menos esto es lo que indica el resumen dado por Turnbull según el manuscrito.

Hemos llegado de este modo a la etapa final del Cálculo infinitesimal clásico, representada por los grandes tratados de Análisis de finales del siglo XIX; desde el punto de vista que hemos adoptado, el de Jordan [*174* c] ocupa un lugar eminente, por razones estéticas por una parte, y también porque, si bien constituye un admirable compendio de los resultados del análisis clásico, también anuncia en muchos aspectos el análisis moderno, y le prepara el camino.

DESARROLLOS ASINTOTICOS

La distinción entre los «infinitamente pequeños» (o «infinitamente grandes») de distintos órdenes, aparece implícitamente desde los primeros escritos sobre el Cálculo diferencial, desde los de Fermat, por ejemplo; pasa a ser plenamente consciente en Newton y Leibniz con la teoría de las «diferencias de orden superior»; y no se tarda mucho en observar que, en los casos más sencillos, el límite (o «verdadero valor») de la expresión $f(x)/g(x)$ en un punto en el que f y g tienden ambas hacia 0, viene dado por el desarrollo de Taylor de estas funciones en un entorno del punto considerado («regla de L'Hôpital», debida verosímilmente a Juan Bernoulli).

Dejando aparte el caso elemental, el principal problema de «cálculo asintótico» que se plantea a los matemáticos desde fines del siglo XVII es el cálculo exacto o aproximado, de sumas de la forma $\sum_{k=1}^{n} f(k)$, cuando n es muy grande; en efecto, un cálculo de este tipo es necesario tanto para la interpolación y el cálculo numérico de la suma de una serie como en el Cálculo de probabilidades, en el que las «funciones de grandes números» tales como $n!$ o $\binom{a}{n}$ desempeñan un papel importante. Ya Newton, con la finalidad de obtener

valores aproximados de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a+k}$ cuando n es grande, indica un método que se reduce (en este caso particular) a calcular los primeros términos de la fórmula de Euler-Maclaurin ([*262*], t. II, pp. 309-310). Hacia el final de siglo, Jacobo Bernoulli, en sus trabajos sobre el cálculo de probabilidades, se propone determinar las sumas $S_k(n) = \sum_{p=1}^{n} p^k$, polinomios en n[1] cuya ley de formación descubre (sin dar la demostración), introduciendo de este modo por primera vez, en la expresión de los coeficientes de estos polinomios, los números que llevan su nombre, y la relación de recurrencia que permite calcularlos ([*19* b], p. 97). En 1730, Stirling obtiene un desarrollo asintótico para $\sum_{k=1}^{n} \log(x+ka)$, con n creciendo indefinidamente, mediante un procedimiento de cálculo de los coeficientes por recurrencia.

Entre 1730 y 1745 se sitúan los trabajos decisivos de Euler sobre las series y las cuestiones relacionadas con ellas. Siendo $S(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$, aplica a la función $S(n)$ la fórmula de Taylor, lo que le da

$$f(n) = S(n) - S(n-1) = \frac{dS}{dn} - \frac{1}{2!}\frac{d^2S}{dn^2} + \frac{1}{3!}\frac{d^3S}{dn^3} - \ldots,$$

ecuación que «invierte» por el método de los coeficientes indeterminados, buscando una solución de la forma

$$S(n) = \alpha \int f(n)dn + \beta f(n) + \gamma \frac{df}{dn} + \delta \frac{d^2f}{dn^2} + \ldots;$$

obteniendo paso a paso de este modo

$$S(n) = \int f(n)dn + \frac{f(n)}{2} + \frac{1}{12}\frac{df}{dn} - \frac{1}{720}\frac{d^3f}{dn^3} + \frac{1}{30.240}\frac{d^5f}{dn^5} - \ldots$$

[1] Son las primitivas de los «polinomios de Bernoulli» $B_k(x)$.

sin conseguir de momento determinar la ley de formación de los coeficientes ([*108* a] (1), t. XIV; pp. 42-72 y 108-123). Pero hacia 1735, por analogía con la descomposición de un polinomio en factores de primer grado, no duda en escribir la fórmula

$$1-\frac{\operatorname{sen} s}{\operatorname{sen} \alpha} = \left(1-\frac{s}{\alpha}\right)\left(1-\frac{s}{\pi-\alpha}\right)\left(1-\frac{s}{-\pi-\alpha}\right)\left(1-\frac{s}{2\pi+\alpha}\right)\left(1-\frac{s}{-2\pi+\alpha}\right)\cdots$$

e igualando los coeficientes de los desarrollos de los dos miembros en serie entera, obtiene en particular para $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ las célebres expresiones de las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ mediante las potencias de π^2 (*loc. cit.*, pp. 73-86). Algunos años después se da por fin cuenta de que los coeficientes de estas potencias de π vienen dados por las mismas ecuaciones que los de su fórmula sumatoria, y reconoce su parentesco con los números introducidos por Bernoulli, y con los coeficientes del desarrollo en serie de $z/(e^z - 1)$ (*loc. cit.*, pp. 407-462).

Independientemente de Euler, Maclaurin había llegado hacia la misma época a la misma fórmula sumatoria por un camino algo menos aventurado, bastante parecido al que se sigue hoy: en efecto, itera la fórmula «tayloriana» que expresa $f(x)$ por medio de las diferencias $f^{(2k+1)}(x+1) - f^{(2k+1)}(x)$, fórmula que obtiene «invirtiendo» los desarrollos de Taylor de estas diferencias por el método de los coeficientes indeterminados ([*214*], t. II, pp. 672-675); por otro lado, señalemos que no se apercibe de la ley de formación de los coeficientes, descubierta por Euler.

Pero Maclaurin, al igual que Euler y todos los matemáticos de su tiempo, presenta todas sus fórmulas como desarrollos en *serie*, cuya convergencia ni siquiera es estudiada. Esto no quiere decir

[2] En 1743, Euler, para contestar a diversas críticas de sus contemporáneos, da una derivación un poco más plausible de los «desarrollos eulerianos» de las funciones trigonométricas; por ejemplo, el desarrollo en producto infinito de sen x se obtiene a partir de la expresión $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ y del hecho de que e^{ix} es el límite del polinomio $\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n$ (*loc. cit.*, pp. 138-155).

que la noción de serie convergente fuese totalmente despreciada en esta época: ya desde Jacobo Bernoulli se sabía que la serie armónica era divergente, y el mismo Euler había precisado este resultado calculando la suma de los n primeros términos de esta serie por medio de su fórmula sumatoria ([*108* a] (1), t. XIV, pp. 87-100 y 108-123), fue también Euler quien señaló que la razón de dos números de Bernoulli consecutivos crece indefinidamente, y, por tanto, que una serie entera que tenga estos números como coeficientes no puede converger (*loc. cit.*, p. 357)[3]. Pero la tendencia hacia el cálculo formal prevalece, y la extraordinaria intuición del propio Euler no le impide caer a veces en errores, como por ejemplo cuando escribe $0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^n$ (*loc. cit.*, p. 362)[4].

Hemos indicado en otro lugar (véase p. 211) cómo los matemáticos de comienzos del siglo XIX, cansados de este formalismo desenfrenado y sin fundamento, trajeron de nuevo al Análisis por el camino del rigor. Una vez precisada la noción de serie convergente, se hizo patente la necesidad de criterios sencillos que permitiesen demostrar la convergencia de series e integrales por comparación con series o integrales conocidas; Cauchy indicó un cierto número de estos criterios en su *Analyse Algébrique* (Análisis Algebraico) ([*56* a] (2), t. III), mientras que Abel, en una memoria póstuma ([*1*], t. II, pp. 197-205), obtiene los criterios logarítmicos de convergencia. Cauchy, por otra parte, dilucida la paradoja de series tales como la serie de Stirling ([*56* a] (1), t. VIII, pp. 18-25), obtenidas aplicando la fórmula de Euler-Maclaurin (y llamadas a menudo series «semiconvergentes»): demuestra que si (debido a la observación de Euler sobre los números de Bernoulli) el término general $u_k(n)$ de una serie de este tipo crece, para un valor *fijo* de n, indefinidamente con k, no por ello deja de ser cierto que, para un valor *fijo* de k, la suma parcial $s_k(n) = \sum_{h=1}^{k} u_h(n)$ proporciona un desarrollo asintótico (para n tendiendo a $+\infty$) de la función «representada» por la serie, y tanto más preciso cuanto mayor es k.

[3] Como la serie que Euler considera en este lugar es introducida con vistas al cálculo numérico, se limita a tomar la suma de los términos que decrecen, y a partir del índice para el que los términos empiezan a crecer los remplaza por un resto del que no indica el origen (el resto de la fórmula de Euler-Maclaurin en su forma general no aparece antes de Cauchy).

[4] No deja de ser una ironía que esta fórmula sea seguida, a una página de distancia, por un pasaje en el que Euler previene acerca del uso sin precauciones de las series divergentes.

En la mayor parte de los cálculos del Análisis clásico es posible obtener una ley general de formación de los desarrollos asintóticos de una función, con un número de términos *arbitrariamente grande*; este hecho ha contribuido a crear una confusión duradera (al menos en el lenguaje) entre seis y desarrollos asintóticos, tanto que H. Poincaré, cuando se toma en 1886 el trabajo de codificar las reglas elementales de los desarrollos asintóticos (según las potencias enteras de $1/x$ en el entorno de $+\infty$ ([*251* a], t. I, pp. 290-296)), emplea aún el vocabulario de la teoría de series. Hasta la aparición de los desarrollos asintóticos originados en la teoría analítica de números no se lleva a cabo la distinción clara entre la noción de desarrollo asintótico y la de serie, debido al hecho de que, en la mayor parte de los problemas de que se ocupa esta teoría solamente se puede obtener explícitamente un número muy pequeño de términos (casi siempre uno solo) del desarrollo buscado.

Estos problemas familiarizaron también a los matemáticos con el empleo de escalas de comparación distintas de la de las potencias de la variable (real o entera). Esta extensión se remonta fundamentalmente a los trabajos de P. du Bois-Reymond [*94* a y b] que fue el primero en abordar sistemáticamente los problemas de comparación de funciones en el entorno de un punto y reconoce, en trabajos muy originales, el carácter «no arquimediano» de las escalas de comparación, a la vez que estudia de forma general la integración y la derivación de las relaciones de comparación, obteniendo numerosos resultados interesantes [*94* b]. Sin embargo, sus demostraciones carecen todavía de claridad y de rigor, y se debe a G. H. Hardy [*147*] la presentación correcta de los resultados de du Bois-Reymond: su contribución fundamental consistió en observar y demostrar la existencia de un conjunto de «funciones elementales», las funciones (H), para las que las operaciones usuales del análisis (sobre todo la derivación) son aplicables a las relaciones de comparación.

LA FUNCION GAMMA

La idea de «interpolar» una sucesión (u_n) mediante los valores de una integral dependiente de un parámetro real λ, igual a u_n para $\lambda = n$ se remonta a Wallis (cf. pp. 256-257). Esta idea es la guía fundamental de Euler cuando, en 1730 ([*108* a] (1), t. XIV, pp. 1-24), se propone interpolar la sucesión de los factoriales. Euler empieza señalando que $n!$ es igual al producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^n \frac{k}{k+n}$, que este producto está definido para todo valor de n (entero o no) y que, en particular, para $n = \frac{1}{2}$, toma el valor $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ según la fórmula de Wallis. La analogía de este resultado con el de Wallis le lleva entonces a volver a considerar la integral $\int_0^1 x^e(1-x)^n dx$ (n entero, e cualquiera), que ya aparecía en este último. Euler obtiene como valor de esta integral $\frac{n!}{(e+1)(e+2)\ldots(e+n)}$ mediante el desarrollo del binomio; un cambio de variables le muestra entonces que $n!$ es el límite, para z tendiendo a 0, de la integral $\int_0^1 \left(\frac{1-x^z}{z}\right)^n dx$,

de aquí la «segunda integral euleriana» $n! = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^n dx$; siguiendo el mismo método, y empleando la fórmula de Wallis, obtiene la fórmula $\int_0^1 \sqrt{\log \frac{1}{x}}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. En sus trabajos posteriores Euler vuelve frecuentemente sobre estas integrales, de esta forma descubre la relación de complementación ([*108* a] (1), t. XV, p. 82, y t. XVII, p. 342), la fórmula $\mathbf{B}(p, q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ ([*108* a], (1), t. XVII, p. 355), y el caso particular de la fórmula de Lagrange-Gauss correspondiente a $x = 1$ ([*108* a] (1), t. XIX, p. 483), y todo esto, desde luego, sin preocuparse de cuestiones de convergencia.

Gauss continúa el estudio de la función Γ a propósito de sus trabajos sobre la función hipergeométrica, de la que la función Γ es un caso límite ([*124* a], t. III, pp. 125-162), en estos trabajos obtiene la fórmula general de multiplicación (que Legendre había obtenido poco antes para $p = 2$). Los trabajos posteriores sobre la función Γ se han referido sobre todo a la prolongación de esta función al dominio complejo. Solo recientemente se ha advertido que $\Gamma(x)$ (en el campo real) se caracterizaba por la propiedad de convexidad logarítmica salvo un factor entre todas las soluciones de la ecuación funcional $f(x+1) = xf(x)$ ([*26*], pp. 149-164); y Artin ha mostrado [7 d] de qué manera pueden relacionarse sencillamente todos los resultados clásicos sobre $\Gamma(x)$ con esta propiedad.

ESPACIOS FUNCIONALES

Sabemos que la noción de función arbitraria no se pone en evidencia mucho antes de principios del siglo XIX. Con mucha más razón, la idea de estudiar de modo general conjuntos de funciones, y de dotarlos de una estructura topológica, no aparece antes de Riemann (véase p. 194) ni empieza a llevarse a cabo hasta finales del siglo XIX.

Sin embargo, la noción de convergencia de una *sucesión* de funciones numéricas se venía empleando de forma más o menos consciente desde los comienzos del Cálculo infinitesimal. Pero se trataba solamente de la convergencia *simple*, y no podía ser de otro modo antes de que las nociones de serie convergente y de función continua hubiesen sido definidas de forma precisa por Bolzano y Cauchy. Este último no se dio cuenta de primera intención de la distinción entre convergencia simple y convergencia uniforme, y creyó poder demostrar que toda serie convergente de funciones continuas tiene como suma una función continua ([*56* a] (2), vol. III, p. 120). El error fue señalado casi inmediatamente por Abel, que demostró al mismo tiempo que toda serie entera es continua en el interior de su intervalo de convergencia, mediante el razonamiento ya clásico que utiliza esencialmente, en este caso particular, la idea de la convergencia uniforme ([*1*], t. I, pp. 223-224). Solo faltaba aislar esta última de forma general, lo que fue realizado independientemente por Stokes y Seidel en 1847-1848, y por el mismo Cauchy en 1853 ([*56* a] (1), vol. XII, p. 30)[1].

[1] En un trabajo fechado en 1841, pero no publicado hasta 1894 ([*329* a], t. I, pp. 67-74), Weierstrass utiliza con una claridad perfecta la noción de convergencia uniforme (a la que da este nombre por primera vez) para las series de potencias de una o varias variables complejas.

Bajo la influencia de Weierstrass y de Riemann, el estudio sistemático de la noción de convergencia uniforme y de las cuestiones conexas es desarrollado en el último tercio del siglo XIX por la escuela alemana (Hankel, du Bois-Reymond) y sobre todo por la escuela italiana: Dini y Arzelà precisan las condiciones necesarias para que el límite de funciones continuas sea continuo, mientras que Ascoli introduce la noción fundamental de equicontinuidad y demuestra el teorema que caracteriza los conjuntos compactos de funciones continuas [*10*] (teorema popularizado más tarde por Montel en su teoría de las «familias normales», que no son otra cosa que los conjuntos relativamente compactos de funciones analíticas).

El mismo Weierstrass descubre por otra parte ([*329* a], t. III, pp. 1-37) la posibilidad de aproximar uniformemente mediante polinomios una función real continua de una o varias variables reales en un conjunto acotado, resultado que suscitó inmediatamente un vivo interés, y dio lugar a numerosos estudios «cuantitativos» que no tienen cabida dentro del punto de vista en el que nos situamos aquí.

La contribución moderna a estas cuestiones ha consistido fundamentalmente en darles todo el alcance de que eran susceptibles, abordándolas para funciones cuyos conjuntos de definición y de valores no se restringían a **R** o a espacios de dimensión finita, situándolas así en su cuadro general por medio de los conceptos topológicos generales. En particular, el teorema de Weierstrass, que se había revelado como un instrumento de primer orden en el análisis clásico, ha sido extendido a casos mucho más generales en estos últimos años por M. H. Stone: desarrollando una idea introducida por H. Lebesgue (en una demostración del teorema de Weierstrass) puso de manifiesto el importante papel desempeñado en la aproximación de las funciones reales continuas por los conjuntos reticulados (aproximación mediante «polinomios reticulados»), y ha demostrado por otra parte cómo el teorema de Weierstrass generalizado implica inmediatamente toda una serie de teoremas de aproximación análogos, que de esta forma se agrupan de un modo mucho más coherente [*301* c].

ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS

La teoría general de los espacios vectoriales topológicos se fundó durante el periodo que va desde 1920 hasta 1930. Pero había sido preparada desde hacía mucho tiempo por el estudio de numerosos problemas de Análisis funcional, y no se puede reconstruir su historia sin indicar, aunque sea en forma sumaria, cómo el estudio de estos problemas llevó poco a poco a los matemáticos (a partir sobre todo de principios del siglo XX) a tomar conciencia del parentesco entre las cuestiones consideradas, y de la posibilidad de formularlas de un modo mucho más general y de aplicarles procedimientos de solución uniformes.

Puede decirse que las analogías entre el Algebra y el Análisis, y las ideas de considerar las ecuaciones funcionales (es decir, aquellas ecuaciones en las que la incógnita es una función) como «casos límites» de ecuaciones algebraicas, se remontan a los comienzos del Cálculo infinitesimal, que responde en un cierto sentido a esa necesidad de generalización «desde lo finito a lo infinito». Pero el antepasado algebraico directo del Cálculo infinitesimal es el cálculo de diferencias finitas (cf. pp. 255-262), y no la resolución de los sistemas lineales generales, y hasta mediados del siglo XVIII no se manifiestan las primeras analogías entre esta última y los problemas del cálculo diferencial, a propósito de la ecuación de las cuerdas

vibrantes. No vamos aquí a narrar detalladamente la historia de dicho problema, pero tenemos que señalar la aparición de dos ideas fundamentales, que no dejarán de aparecer en lo sucesivo, y que parecen deberse a D. Bernoulli. La primera consiste en considerar la oscilación de la cuerda como «caso límite» de la oscilación de un sistema de n masas puntuales, cuando n aumenta indefinidamente; sabemos que, para n finito, este problema daría lugar un poco más tarde al primer ejemplo de cálculo de los valores propios de una transformación lineal (véase p. 124); a estos números corresponden en el «paso al límite» considerado las frecuencias de las «oscilaciones propias» de la cuerda, observadas experimentalmente mucho tiempo antes, y cuya existencia teórica había sido establecida (fundamentalmente por Taylor) a principios de siglo. Esta analogía formal, aunque muy poco mencionada posteriormente ([*302* b], p. 390) no parece haber sido nunca olvidada a lo largo del siglo XIX, pero, como más tarde veremos, no llegará a adquirir toda su importancia hasta 1890-1900.

La otra idea de D. Bernoulli (tal vez inspirada por los hechos experimentales) es el «principio de superposición», según el cual la oscilación más general de la cuerda debe poder «descomponerse» en superposición de «oscilaciones propias», lo que, matemáticamente hablando, significa que la solución general de la ecuación de las cuerdas vibrantes debe poder desarrollarse en una serie $\sum_n c_n\varphi_n(x,t)$, donde las $\varphi_n(x,t)$ representan las oscilaciones propias. Sabemos que este principio debía originar una larga discusión sobre la posibilidad de desarrollar una función «arbitraria» en serie trigonométrica, discusión que solamente fue zanjada por los trabajos de Fourier y Dirichlet en el primer tercio del siglo XIX. Pero antes incluso de que se llegase a este resultado, habían aparecido otros ejemplos de desarrollos en serie de funciones ortogonales[1]: funciones esféricas y polinomios de Legendre, así como distintos sistemas de la forma $(e^{i\lambda_n x})$, donde las λ_n no son ya múltiplos de un mismo número, y que habían sido introducidos desde el siglo XVIII a propósito de problemas de oscilación, así como por Fourier y Poisson en sus trabajos sobre la teoría del calor. Hacia 1830 todos los fenómenos observados en estos distintos casos particulares son sistematizados

[1] Sin embargo, este término no aparece antes de los trabajos de Hilbert.

por Sturm [*302* a y b] y Liouville [*204* a y b] en una teoría general de las oscilaciones para las funciones de una variable: consideran la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\rho(x)y = 0 \qquad (p(x) > 0,\ \rho(x) > 0) \tag{1}$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{cases} y'(a) - h_1 y(a) = 0 \\ y'(b) + h_2 y(b) = 0 \end{cases} \qquad (h_1 \geqslant 0,\ h_2 \geqslant 0,\ a < b) \tag{2}$$

y demuestran los resultados fundamentales siguientes:

1) el problema solamente tiene solución $\neq 0$ cuando λ toma uno de los valores de una sucesión (λ_n) de números > 0 que tiende a $+\infty$;

2) para cada λ_n, las soluciones son múltiplos de una misma función v_n, que podemos suponer «normada» por la condición $\int_a^b \rho v_n^2 dx = 1$, y se tiene $\int_a^b \rho v_m v_n dx = 0$ para $m \neq n$;

3) toda función f, dos veces diferenciable en $[a, b]$, y verificando las condiciones de contorno (2), es desarrollable en serie uniformemente convergente $f(x) = \sum_n c_n v_n(x)$, siendo $c_n = \int_a^b \rho f v_n dx$;

4) se tiene la igualdad $\int_a^b \rho f^2 dx = \sum_n c_n^2$ (ya demostrada por Parseval en 1799 —de modo puramente formal, además— para el sistema de funciones trigonométricas, y de donde se deduce inmediatamente la «desigualdad de Bessel» enunciada por este último (siempre para las series trigonométricas) en 1828).

Estas propiedades son completadas medio siglo más tarde por los trabajos de Gram [*133*], que, continuando las investigaciones de Tchebichef, pone en evidencia la relación entre los desarrollos en serie de funciones ortogonales y el problema de la «mejor aproximación cuadrática» (surgiendo directamente del «método de los mínimos cuadrados» de Gauss, en la teoría de errores): este último consiste, dada una sucesión finita de funciones $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$, en encontrar, para una función f, la combinación lineal $\sum_i a_i\psi_i$ para la que la integral $\int_a^b \rho(f - \sum_i a_i\psi_i)^2 dx$ alcanza su mínimo. En principio se trata solamente de un problema trivial de álgebra lineal, pero Gram lo resuelve de una manera original aplicando a los ψ_i el proceso de «ortonormalización» que se conoce generalmente por el nombre de Erhard Schmidt. Pasando a continuación al caso de un sistema ortonormal infinito (φ_n), se plantea el problema de saber cuándo la «mejor aproximación cuadrática» μ_n de una función f por medio de las combinaciones lineales de las n primeras funciones de la sucesión, tiende a 0 cuando n crece indefinidamente[2]; de esta forma se ve llevado a definir la noción de sistema ortonormal completo, reconociendo que esta propiedad equivale a la no existencia de funciones $\neq 0$ ortogonales a todas las φ_n. Intenta igualmente dilucidar el concepto de «convergencia en media cuadrática», pero antes de la introducción de las nociones fundamentales de la teoría de la medida, era imposible obtener en esta dirección resultados que no fuesen muy particulares.

En la segunda mitad del siglo XIX el esfuerzo principal de los analistas se dirige más bien a la extensión de la teoría de Sturm-Liouville a las funciones de varias variables, al que conducía sobre todo el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico de la Física matemática y los problemas de contorno que se les asocian de modo natural. El interés se centra principalmente en la ecuación de la «membrana vibrante»

$$L_\lambda(u) \equiv \Delta u + \lambda u = 0 \tag{3}$$

de la que se buscan las soluciones que se anulan en el borde de un dominio G «bastante regular», y solo muy poco a poco fueron superadas las considerables dificultades analíticas planteadas por este problema, en el que no podía pensarse en aplicar los métodos que habían tenido éxito en el caso de funciones de una variable. Recordemos las principales etapas hacia la solución: la introducción de

[2] Hay que señalar que a lo largo de todo este estudio, Gram no se limita a la consideración de las funciones continuas, sino que insiste sobre la importancia de la condición $\int_a^b \rho f^2 dx < +\infty$.

la «función de Green» de G, cuya existencia es demostrada por Schwarz; la demostración, también debida a Schwarz, de la existencia del mínimo valor propio; finalmente, en 1894, en una memoria célebre ([*251* a], t. IX, pp. 123-196), H. Poincaré consigue demostrar la existencia y las propiedades esenciales de todos los valores propios, considerando, para un «segundo miembro» f dado, la solución u_λ de la ecuación $L_\lambda(u) = f$ que se anula en el contorno, y, probando, mediante una hábil generalización del método de Schwarz, que u_λ es función meromorfa de la variable compleja λ, que solamente posee polos simples reales λ_n, que son justamente los valores propios buscados.

Estos trabajos están estrechamente relacionados con los comienzos de la teoría de las ecuaciones integrales lineales, que debía sin duda alguna contribuir de manera fundamental al surgimiento de las ideas modernas. Aquí nos limitaremos a dar algunas breves indicaciones acerca del desarrollo de esta teoría. Este tipo de ecuaciones funcionales, que al principio habían aparecido esporádicamente durante la primera mitad del siglo XIX (Abel, Liouville), habían tomado importancia desde que Beer y C. Neumann habían reducido la solución del «problema de Dirichlet» para un dominio G «bastante regular», a la resolución de una «ecuación integral de segunda especie»

$$(4) \qquad u(x) + \int_a^b K(x, y)u(y)dy = f(x)$$

para la función incógnita u; ecuación que C. Neumann había conseguido resolver por medio de un procedimiento de «aproximaciones sucesivas» en 1877. Impulsado sin duda igualmente por las analogías algebraicas ya mencionadas, así como por los resultados que acababa de obtener referentes a las membranas vibrantes, H. Poincaré, en 1896 ([*251* a], t. IX, pp. 202-272) tiene la idea de introducir un parámetro variable λ delante de la integral en la ecuación anterior, y afirma que, al igual que para la ecuación de las membranas vibrantes, la solución es entonces función meromorfa de λ, pero no consigue llegar a demostrar este resultado, que fue establecido (para un «núcleo» K continuo y en un intervalo $[a, b]$ finito) por I. Fredholm cuatro años después [*116*]. Este último, quizá todavía más conscientemente que sus predecesores, se deja guiar completamente por la analogía de (4) con el sistema lineal

$$(5) \qquad \sum_{q=1}^{n} \left(\delta_{pq} + \frac{1}{n} a_{pq}\right)x_q = b_p \qquad (1 \leqslant p \leqslant n)$$

para obtener la solución de (4) como cociente de dos expresiones formadas según el modelo de los determinantes que intervienen en las fórmulas de Cramer. Por otra parte, no se trataba de una idea nueva: ya desde comienzos del siglo XIX el método de los «coeficientes indeterminados» (consistente en obtener una función incógnita supuesto que es desarrollable en serie $\sum_n c_n\varphi_n$, donde las φ_n son funciones conocidas, calculando los coeficientes c_n) había llevado a «sistemas lineales con infinitas incógnitas»

$$(6) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Fourier, que se encuentra con un sistema de este tipo, lo resuelve todavía como un matemático del siglo XVIII: suprime todos los términos que posean un índice i o j superior a n, resuelve explícitamente el sistema finito así obtenido mediante las fórmulas de Cramer, y después «pasa al límite» haciendo tender n a $+\infty$ en la solución. Cuando más adelante no se siente satisfecho con estas manipulaciones, sigue siendo mediante la teoría de determinantes como quiere atacar el problema; a partir de 1886 (después de los trabajos de Hill), H. Poincaré, y más tarde H. von Koch, habían construido una teoría de los «determinantes infinitos» que permitía resolver ciertos tipos de sistemas (6) según el modelo clásico, y si bien estos resultados no eran aplicables directamente al problema considerado por Fredholm, es cierto que al menos la teoría de von Koch, en particular, le sirvió de modelo para la formación de sus «determinantes».

Este es el momento en que entra Hilbert en escena, dando un nuevo impulso a la teoría [*163* b]. Empieza por completar los trabajos de Fredholm realizando efectivamente el paso al límite que lleva de la solución de (5) a la de (4), pero le añade inmediatamente el paso al límite correspondiente para la teoría de las formas

cuadráticas reales, al que llevaban de modo natural los tipos de ecuaciones integrales con núcleo simétrico (es decir, tales que $K(y, x) = K(x, y)$), las más frecuentes con mucho en la Física matemática. De este modo llega a la fórmula fundamental que generaliza directamente la reducción de una forma cuadrática a sus ejes

$$(7) \qquad \int_a^b \int_a^b K(s, t)x(s)x(t)dsdt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}\left(\int_a^b \varphi_n(s)x(s)ds\right)^2,$$

siendo los λ_n los valores propios (necesariamente reales) del núcleo K, y las φ_n el sistema ortonormal de las funciones propias correspondientes, y siendo el segundo miembro de la fórmula (7) una serie convergente para $\int_a^b x^2(s)dx \leq 1$. Demuestra también cómo toda función «representable» en la forma $f(x) = \int_a^b K(x, y)g(y)dy$ admite el «desarrollo» $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\int_a^b \varphi_n(y)f(y)dy$, y, continuando la analogía con la teoría clásica de las formas cuadráticas, indica un procedimiento de determinación de los λ_n mediante un método variacional, que no es otra cosa que la extensión de las propiedades extremales bien conocidas de los ejes de una cuádrica ([*163* b], pp. 1-38).

Estos primeros resultados de Hilbert fueron recogidos casi inmediatamente por E. Schmidt en una forma más simple y más general, evitando la introducción de los «determinantes de Fredholm», así como el paso del caso finito al infinito, y ya muy cercano a una exposición abstracta, puesto que únicamente las propiedades fundamentales de linealidad y de positividad de la integral son empleadas en las demostraciones [*274* a]. Pero ya Hilbert había llegado a concepciones todavía más generales. Todos los trabajos anteriores ponían de manifiesto la importancia de las funciones de cuadrado integrable, y la fórmula de Parseval establecía una relación estrecha entre estas funciones y las sucesiones (c_n) tales que $\sum_n c_n^2 < +\infty$. Fue sin duda esta idea la que guió a Hilbert en sus memorias de 1906 ([*163* b], cap. XI-XIII) en las que, volviendo al viejo método de los «coeficientes indeterminados», demuestra que la resolución de la ecuación integral (4) es equivalente al sistema de infinitas ecuaciones lineales

$$(8) \qquad x_p + \sum_{q=1}^{\infty} k_{pq}x_q = b_p \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

para los «coeficientes de Fourier» $x_p = \int_a^b u(t)\omega_p(t)dt$ de la función incógnita u respecto a un sistema ortonormal completo dado (ω_n) (con $b_p = \int_a^b f(t)\omega_p(t)dt$ y $k_{pq} = \int_a^b\int_a^b K(s, t)\omega_p(s)\omega(t_q)dsdt$). Por otra parte, las únicas soluciones de (8) que han de considerarse desde este punto de vista son aquellas para las cuales $\sum_n x_n^2 < +\infty$; también Hilbert se limita sistemáticamente a este tipo de soluciones, pero amplía por el contrario las condiciones impuestas a la «matriz infinita» (k_{pq}) (que, en (8), es tal que $\sum_{p,q} k_{pq}^2 < +\infty$). A partir de este momento está claro que el «espacio de Hilbert» de las sucesiones $x = (x_n)$ de los números reales tales que $\sum_n x_n^2 < +\infty$, aunque no se introduzca explícitamente, permanece subyacente a toda la teoría y aparece como un «paso al límite» a partir del espacio euclídeo de dimensión finita. Además, y esto es especialmente importante para los avances posteriores, Hilbert se ve llevado a introducir en este espacio no una, sino dos nociones distintas de convergencia (correspondientes a lo que se ha llamado la topología débil y la topología fuerte[3]), así como un «principio de elección» que no es otra cosa que la propiedad de compacidad débil de la bola unidad. La nueva álgebra lineal que desarrolla a propósito de la resolución de los sistemas (8) se basa totalmente en estas nociones topológicas: las

[3] El cálculo de variaciones había llevado ya a considerar de un modo natural distintas nociones de convergencia sobre el mismo conjunto de funciones (según que se pidiera solamente la convergencia uniforme de las funciones o la convergencia uniforme de las funciones y de un cierto número de sus derivadas), pero las modalidades de convergencia definidas por Hilbert eran de un tipo totalmente nuevo en esta época.

aplicaciones lineales, formas lineales y formas bilineales (asociadas a las aplicaciones lineales) son clasificadas y estudiadas según sus propiedades de «continuidad»[4]. En particular, Hilbert descubre que el éxito del método de Fredholm se debía a la noción de «continuidad completa», que pone de manifiesto formulándola para las formas bilineales [5] y que estudia a fondo; no podemos aquí dar más detalles sobre esta importante noción, ni sobre los profundos y admirables trabajos en que Hilbert inaugura la teoría espectral de las formas bilineales simétricas (acotadas o no).

El lenguaje de Hilbert sigue siendo clásico, y a lo largo de los «Grundzüge» («Elementos») no pierde de vista las aplicaciones de la teoría, que desarrolla en numerosos ejemplos (que ocupan más o menos la mitad del libro). La generación siguiente adopta ya un punto de vista mucho más abstracto. Influidos por las ideas de Fréchet y de F. Riesz sobre la topología general (véase p. 197), E. Schmidt [*274* b] y el mismo Fréchet introducen de modo deliberado, en 1907-1908, el lenguaje de la geometría euclídea en el «espacio de Hilbert» (real o complejo); en estos trabajos es mencionada por primera vez la norma (con la notación actual $\|x\|$), la desigualdad triangular que verifica, y el hecho de que el espacio de Hilbert es «separable» y completo; además, E. Schmidt demuestra la existencia de la proyección ortogonal sobre una variedad lineal cerrada, lo que le permite dar una forma más sencilla y general a la teoría de los sistemas lineales de Hilbert. También en 1907, Fréchet y F. Riesz señalan que el espacio de funciones de cuadrado sumable posee una «geometría» totalmente análoga, analogía que queda perfectamente explicada cuando, unos meses más tarde, F. Riesz y E. Fischer demuestran que es completo e isomorfo al «espacio de Hilbert», poniendo simultáneamente en evidencia de una forma indudable la importancia de la herramienta que acababa de crear Lebesgue. A partir de este momento puede considerarse que los puntos fundamen-

[4] Hay que hacer notar que hasta 1935 se entendía prácticamente siempre por función «continua» una aplicación que transformaba toda sucesión convergente en una sucesión convergente.

[5] Para Hilbert, una forma bilineal $B(x, y)$ es completamente continua si, cuando las sucesiones (x_n), (y_n) tienden *débilmente* a x e y respectivamente, $B(x_n, y_n)$ tiende a $B(x, y)$.

tales de la teoría de los espacios de Hilbert han sido fijados; entre los progresos más recientes hay que señalar la presentación axiomática de la teoría realizada hacia 1930 por M. H. Stone y J. von Neumann, así como el abandono de la restricción de «separabilidad», que se efectúa hacia 1934, en los trabajos de Rellich, Löwig y F. Riesz [*260* g].

Sin embargo, durante los primeros años del siglo XX, otras corrientes de ideas vinieron a reforzar la tendencia que llevaba a la teoría de los espacios normados. La idea general de «funcional» (es decir, de función con valores numéricos definida en un conjunto cuyos elementos son ellos mismos funciones numéricas de una o varias variables reales) había surgido durante las últimas décadas del siglo XIX en relación con el cálculo de variaciones, por una parte, y con la teoría de las ecuaciones integrales por otra. Pero si bien se debe sobre todo a la escuela italiana (centrada en Pincherle y sobre todo en Volterra) dicha noción, así como la idea más general de «operador», los trabajos de esta escuela eran a menudo de un carácter considerablemente formal, y relacionados con problemas muy particulares, faltando un análisis suficientemente profundo de los conceptos topológicos subyacentes. Hadamard inaugura en 1903 la teoría moderna de la dualidad «topológica», buscando los «funcionales» lineales continuos más generales sobre el espacio $\mathcal{C}(I)$ de las funciones numéricas continuas sobre un intervalo compacto I (espacio dotado de la topología de la convergencia uniforme), caracterizándolas como los límites de las sucesiones de integrales $x \to \int k_n(t)x(t)dt$. En 1907, Fréchet y F. Riesz demuestran que las formas lineales continuas en el espacio de Hilbert son las formas «acotadas» introducidas por Hilbert, y después, en 1909, F. Riesz da una forma definitiva al teorema de Hadamard expresando todo funcional lineal continuo sobre $\mathcal{C}(I)$ mediante una integral de Stieltjes, teorema que serviría más tarde de punto de partida para la teoría moderna de la integración (véase p. 312).

Es también F. Riesz quien al año siguiente da lugar a nuevos e importantes avances en la teoría ([*260* c], p. 452) mediante la introducción y el estudio (calcado sobre la teoría del espacio de Hilbert) de los espacios $L^p(I)$ de las funciones de potencia p-ésima sumable en un intervalo I (para un exponente p tal que $1 < p < +\infty$),

estudio que continúa tres años después [*260* e] con un trabajo análogo sobre los espacios de sucesiones $L^p(N)$; estos trabajos, como veremos más adelante, deberían contribuir de una forma importante a aclarar las ideas acerca de la dualidad, debido al hecho de que aquí aparecían por primera vez dos espacios en dualidad no «naturalmente» isomorfos[6].

A partir de este momento F. Riesz piensa en un estudio axiomático que englobe todos estos resultados ([*260* c], p. 452), y parece que solamente un escrúpulo de analista preocupado por no alejarse demasiado de las matemáticas clásicas le haya impedido escribir de esta forma su célebre memoria de 1918 sobre la teoría de Fredholm [*260* f]. En ella considera en principio el espacio $\mathcal{C}(I)$ de las funciones continuas en un intervalo compacto, pero después de haber definido la norma en este espacio, y de haber señalado que $\mathcal{C}(I)$, dotado de esta norma, es completo, ya no utiliza en sus razonamientos otra cosa que los axiomas de los espacios normados completos[7]. Sin entrar aquí en un examen detallado de este trabajo, mencionemos que en él se define por primera vez la noción de aplicación lineal completamente continua (por la propiedad de transformar un entorno en un conjunto relativamente compacto)[8], y, en una obra maestra de análisis axiomático, reduce toda la teoría de Fredholm (en su aspecto cualitativo) a un teorema fundamental, a saber, que todo espacio normado localmente compacto es de dimensión finita.

La definición general de los espacios normados fue dada en 1920-

[6] Aunque la dualidad entre L^1 y L^∞ esté implícita en la mayor parte de los trabajos de esta época sobre la integral de Lebesgue, no se demostró hasta 1918 (por H. Steinhaus) que toda forma lineal continua sobre $L^1(I)$ (I intervalo finito) es de la forma $x \to \int_I f(t)x(t)dt$, con $f \in L^\infty(I)$.

[7] F. Riesz señala además explícitamente que la aplicación de sus teoremas a las funciones continuas no está allí más que como «piedra de toque» de concepciones mucho más generales ([*260* f], p. 71).

[8] En sus trabajos sobre los espacios L^p, F. Riesz había definido las aplicaciones completamente continuas como aquellas que transforman toda sucesión débilmente convergente en una sucesión fuertemente convergente, lo que (teniendo en cuenta la compacidad débil de la bola unidad en los L^p para $1 < p < +\infty$) es equivalente, en este caso, a la definición anterior. Por otra parte, F. Riesz había indicado que para el espacio L^2 su definición era equivalente a la de Hilbert (traduciéndola del lenguaje de las aplicaciones lineales al de las formas bilineales ([*260* c], p. 487)).

1922 por S. Banach, H. Hahn, y E. Helly (este último solamente considera espacios de sucesiones de números reales o complejos). En los diez años siguientes, esta teoría se desarrolla fundamentalmente en torno a dos cuestiones de una importancia fundamental para las aplicaciones: la teoría de la dualidad y los teoremas relacionados con la noción de «categoría» de Baire.

Hemos visto que la idea de dualidad (en el sentido topológico) se remonta a principios del siglo XX, subyace a la teoría de Hilbert y ocupa un lugar central en la obra de F. Riesz. Este último hace observar, por ejemplo, desde 1911 ([*260* d], pp. 41-42) que la relación $|f(x)| \leq M\|x\|$ (tomada como definición de los funcionales lineales «acotados» en el espacio de Hilbert) es equivalente a la continuidad de f si nos situamos en el espacio $\mathcal{C}(I)$, y hace esto siguiendo un razonamiento de carácter completamente general. A propósito de la caracterización de los funcionales lineales continuos sobre $\mathcal{C}(I)$ señala también que la condición para que un conjunto A sea denso en $\mathcal{C}(I)$ es que no exista ninguna medida de Stieltjes $\mu \neq 0$ sobre I que sea «ortogonal» a toda función de A (generalizando de este modo la condición de Gram para los sistemas ortonormales completos); finalmente constata, en el mismo trabajo, que el dual del espacio L^∞ es «mayor» que el espacio de las medidas de Stieltjes ([*260* d], p. 62).

Por otra parte, en sus trabajos sobre los espacios $L^p(I)$ y $L^p(N)$, F. Riesz consigue modificar el método de resolución de sistemas lineales en el espacio de Hilbert dado por E. Schmidt [*274* b], de tal modo que resulta aplicable en casos más generales. La idea de E. Schmidt consistía en determinar una solución «extremal» de (6) buscando el punto de la variedad lineal cerrada representada por las ecuaciones (6) cuya distancia al origen sea mínima. Siguiendo la misma idea, F. Riesz demuestra que una condición necesaria y suficiente para que exista una función $x \in L^p(a, b)$ que satisfaga las ecuaciones

$$\int_a^b \alpha_i(t)x(t)dt = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

(donde los α_i pertenecen a L^q (con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)), y tal que además

$\int_a^b |x(t)|^p dt \leqslant M^p$, es que para toda sucesión finita $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ de números reales, se tenga

$$(10) \qquad \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\right| \leqslant M \cdot \left(\int_a^b \sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i \alpha_i(t)\right|^q dt\right)^{1/q}$$

En 1911 [*260* d] trata de modo análogo el «problema generalizado de los momentos», consistente en resolver el sistema

$$(11) \qquad \int_a^b \alpha_i(t) d\xi(t) = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

donde las α_i son continuas y la incógnita es una medida de Stieltjes ξ[9]; está claro que este problema puede enunciarse diciendo que se trata de determinar un funcional lineal continuo sobre $\mathfrak{C}(I)$ a partir de sus valores en una sucesión de puntos dados en este espacio. También Helly trata de esta forma el problema en 1912 —obteniendo las condiciones de F. Riesz siguiendo un método bastante diferente y de mayor alcance[10]— y también sigue este método cuando vuelve a considerarlo en 1921 en condiciones mucho más generales. Introduciendo la noción de norma (en los espacios de sucesiones) como hemos visto más arriba, señala que esta noción generaliza la de «funcional de Minkowski» («jauge») de un cuerpo convexo en el espacio de dimensión n, empleada por Minkowski en sus célebres trabajos sobre la «geometría de los números» [*221* a y b]. En estos trabajos, Minkowski había definido también (en $\mathbf{R}^n$) la noción de hiperplano soporte y de «función soporte» [*221* b], y

[9] El «problema de los momentos» clásico corresponde al caso en que el intervalo $]a, b[$ es $]0, +\infty[$ o $]-\infty, +\infty[$ y donde $\alpha_i(t) = t^i$, además se impone la condición de que la medida ξ sea positiva (F. Riesz indica en su memoria de 1911 cómo estas condiciones generales pueden ser modificadas cuando se buscan soluciones de esta naturaleza). Entre los distintos métodos de resolución del problema de los momentos clásicos, hay que señalar en particular la de M. Riesz, que combina elegantemente las ideas generales del cálculo funcional y la teoría de las funciones de una variable compleja para obtener condiciones explícitas para los b_i [*261*].

[10] Al igual que F. Riesz ([*260* d], pp. 49-50). Helly utiliza en esta demostración un «principio de elección» que no es desde luego otra cosa que la compacidad débil de la bola unidad en el espacio de las medidas de Stieltjes; F. Riesz había hecho también uso de la propiedad análoga en los L^p $(1 < p < +\infty)$.

demostrado la existencia de un hiperplano soporte en todo punto frontera de un cuerpo convexo ([*221* a], pp. 33-35). Helly extiende estas nociones a un espacio de sucesiones E, dotado de una norma cualquiera, establece una dualidad entre E y el espacio E′ de las sucesiones $u = (u_n)$ tales que para todo $x = (x_n) \in E$, la serie $(u_n x_n)$ sea convergente; si $\langle u, x\rangle$ designa la suma de esta serie, se define una norma en E′ por la fórmula $\sup_{x \neq 0} |\langle u, x\rangle|/\|x\|$, que proporciona la función soporte en los espacios de dimensión finita[11]. La resolución de un sistema (6) en E, suponiendo que todas las sucesiones $u_i = (a_{ij})_{j \geq 1}$ pertenecen a E′, se reduce, como demuestra Helly, a resolver sucesivamente los dos problemas siguientes: 1.º hallar una forma lineal continua sobre el espacio normado E′ tal que $L(u_i) = b_i$ para todo índice i, lo que, como Helly indica, lleva a condiciones del tipo (10); 2.º investigar si tal forma lineal puede escribirse en la forma $u \to \langle u, x\rangle$ para un $x \in E$. Este último problema, como observa Helly, no tiene necesariamente solución, incluso cuando L existe, y se limita a dar algunas condiciones suficientes que implican la existencia de la solución $x \in E$ en ciertos casos particulares [*156*].

Estas ideas toman su forma definitiva en 1927, en una memoria fundamental de H. Hahn [*142*], cuyos resultados son reencontrados independientemente dos años después por S. Banach [*14* c]. El procedimiento de Minkowski-Helly es aplicado por Hahn a un espacio normado cualquiera, y nos da una estructura de espacio normado (completo) sobre el dual, lo que permite inmediatamente a Hahn considerar los duales sucesivos de un espacio normado y plantear de forma general el problema de los espacios reflexivos, que Helly había entrevisto. Pero, sobre todo, el problema capital de la prolongación de un funcional lineal continuo conservando su norma es resuelto definitivamente por Hahn de modo totalmente general, siguiendo un razonamiento de inducción transfinita sobre la dimensión —proporcionando así uno de los primeros ejemplos de una aplicación importante del axioma de elección al Análisis fun-

[11] Para obtener de este modo una norma hay que suponer que la relación $\langle u, x\rangle = 0$ para todo $x \in E$ implica $u = 0$, como señala además explícitamente Helly.

cional[12]. Banach añade a estos resultados un estudio extenso de las relaciones entre una aplicación lineal continua y su traspuesta, extendiendo a los espacios normados generales resultados que eran conocidos solamente para los espacios L^p [*260* c] mediante un teorema profundo relativo a las partes débilmente cerradas de un espacio dual; por otra parte, estos resultados se expresan de forma más reveladora empleando la noción de espacio cociente de un espacio normado, introducida algunos años después por Hausdorff y por el mismo Banach. Por último, es también Banach quien descubre la relación entre la compacidad débil de la bola unidad (observada en numerosos casos particulares, como hemos señalado anteriormente) y la reflexividad, al menos en lo que se refiere a los espacios de tipo numerable ([*14* a], p. 189). A partir de este momento pueden considerarse fijadas las grandes líneas de la teoría de la dualidad de los espacios normados.

En esta misma época se ponen también en claro algunos teoremas de apariencia paradójica, cuyos primeros ejemplos se remontan más o menos a 1910. En efecto, Hellinger y Toeplitz habían demostrado, en sustancia, en este año, que una sucesión de formas bilineales acotadas $B_n(x, y)$ en un espacio de Hilbert, cuyos valores $B_n(a, b)$ para todo par dado (a, b) están acotados (por un número dependiente *a priori* de a y b) es, de hecho, *uniformemente acotada* en toda bola. La demostración se hace por reducción al absurdo, y consiste en construir un par particular (a, b) que no verifique la hipótesis siguiendo un método de recurrencia conocido desde entonces como el «método de la joroba deslizante», y que sigue siendo muy útil en cuestiones análogas. Además, ya en 1905 Lebesgue había empleado un método análogo para demostrar la existencia de funciones continuas cuya serie de Fourier diverge en ciertos puntos, y, el mismo año que Hellinger y Toeplitz, aplica el mismo método para demostrar que una serie débilmente convergente en L^1 está acotada en norma[13]. Estos ejemplos se multiplican durante los años siguientes, pero no se introducen ideas nuevas hasta 1927, fecha en que

[12] Banach había hecho ya un razonamiento análogo en 1923 [*14* b] para definir una medida invariante en el plano (definida para *toda* parte acotada).

[13] Señalemos también el teorema análogo (más fácil) demostrado por Landau en 1907, y que sirvió de punto de partida a F. Riesz en su teoría de los espacios L^p:

Banach y Steinhaus (con la colaboración parcial de S. Saks) relacionan estos fenómenos con la noción de conjunto de primera categoría y con el teorema de Baire en los espacios métricos completos, obteniendo un enunciado general que engloba todos los casos particulares anteriores [*15*]. El estudio de las cuestiones de «categoría» en los espacios normados completos lleva además a Banach, en esta misma época, a otros muchos resultados relativos a las aplicaciones lineales continuas; el más destacado, y sin duda el más profundo, es el teorema del «gráfico cerrado» que, al igual que el teorema de Banach-Steinhaus, se ha convertido en una herramienta de primera importancia para el Análisis funcional moderno [*14* c].

La publicación del tratado de Banach sobre las «Opérations linéaires» («Operaciones lineales») [*14* a] señala, podríamos decir, el principio de la madurez de la teoría de los espacios normados. Todos los resultados que acabamos de mencionar, así como otros muchos, se encuentran expuestos en este libro, de forma todavía un poco desordenada, pero acompañados de numerosos ejemplos importantes tomados de dominios muy variados del Análisis, y que parecían presagiar un brillante porvenir a la teoría. De hecho, la obra tuvo un éxito considerable, y uno de sus efectos más inmediatos fue la adopción casi universal del lenguaje y de las notaciones empleados por Banach. Pero, si exceptuamos la teoría de las álgebras de Banach y sus aplicaciones al análisis armónico, la ausencia casi total de nuevas aplicaciones de la teoría a los grandes problemas del Análisis clásico no ha respondido a las esperanzas depositadas en ella.

Los avances más fecundos se han producido más bien en el sentido de una extensión y un análisis axiomático más profundo de las concepciones relativas a los espacios normados. Aunque casi todos los espacios funcionales que habían aparecido desde principios del siglo XX se presentaban casi siempre provistos de una norma «natural», no se habían dejado de señalar algunas excepciones. Hacia 1910, E. H. Moore había propuesto generalizar la noción de convergencia uniforme sustituyéndola por la de «convergencia uniforme relativa», en la que un entorno de 0 está formado por las

si la serie de término general $u_n x_n$ converge para toda sucesión $(x_n) \in L^q(N)$, la sucesión (u_n) pertenece a $L^p(N)$ (con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

funciones f que verifican una relación $|f(t)| \leq \varepsilon g(t)$, siendo g una función siempre > 0, que puede variar con el entorno. Se había observado por otra parte, antes de 1930, que nociones tales como la convergencia simple, la convergencia en medida para las funciones medibles, o la convergencia compacta para las funciones enteras, no eran definibles por medio de una norma; y en 1926, Fréchet había notado que espacios vectoriales de este tipo podían ser metrizables y completos. Pero la teoría de estos espacios más generales solamente se desarrollaría de forma fructífera al relacionarse con la idea de convexidad. Esta última (que hemos visto surgir en Helly) fue objeto de los estudios de Banach y sus discípulos, que se dieron cuenta de la posibilidad de interpretar de este modo en forma más geométrica numerosos enunciados de la teoría de los espacios normados, preparando el camino para la definición general de los espacios localmente convexos, dada por J. von Neumann en 1935. La teoría de estos espacios, y sobre todo las cuestiones relativas a la dualidad, han sido desarrolladas fundamentalmente durante los diez últimos años. Con este motivo debemos señalar, por una parte, los progresos en cuanto a sencillez y generalidad, que han sido posibles gracias al desarrollo de las nociones fundamentales de la Topología general, realizado entre 1930 y 1940; y, en segundo lugar, la importancia adquirida por la noción de conjunto acotado, introducida por Kolmogorov y von Neumann en 1935, y cuyo papel fundamental en las cuestiones de dualidad ha sido puesta en evidencia en los trabajos de Mackey [*213* a y b]. Por último, y sobre todo, hay que señalar que el impulso principal que ha motivado estos trabajos ha procedido de las nuevas posibilidades de aplicación del Análisis a dominios en los que la teoría de Banach resultaba inoperante: a este respecto debemos señalar la teoría de los espacios de sucesiones, desarrollada por Köthe, Toeplitz y sus discípulos desde 1934 en una serie de memorias [*184*], la reciente puesta a punto de la teoría de los «funcionales analíticos» de Fantappié, y sobre todo la teoría de distribuciones de L. Schwartz [*280*], en la que la moderna teoría de los espacios localmente convexos ha encontrado un campo de aplicaciones que está lejos de haberse agotado.

INTEGRACION EN LOS ESPACIOS LOCALMENTE COMPACTOS

El desarrollo de la noción moderna de integral está estrechamente relacionado con la evolución de la idea de función y con el estudio a fondo de las funciones numéricas de variables reales, que se ha venido realizando desde principios del siglo XIX. Sabemos que Euler concebía ya la noción de función de una forma bastante general, puesto que para él una curva «arbitraria» que es cortada en un único punto por toda paralela al eje Oy define una función $y = f(x)$ (cf. p. 270), pero, como casi todos sus contemporáneos, se niega a admitir que tales funciones puedan expresarse «analíticamente». Este punto de vista no se modificó demasiado hasta los trabajos de Fourier, pero el descubrimiento por este último de la posibilidad de representar funciones discontinuas como sumas de series trigonométricas[1] iba a ejercer una influencia decisiva sobre las generaciones siguientes. Es necesario añadir que las demostraciones de Fourier carecían de todo rigor, y que su dominio de validez no aparecía claramente; sin embargo, las fórmulas integrales

$$(1) \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \operatorname{sen} nx dx \quad (n \geqslant 1)$$

[1] Además, solo se trata de «descubrimiento» en un sentido muy relativo: Euler conocía ya los desarrollos en serie trigonométrica de funciones no periódicas tales

que proporcionan los coeficientes del desarrollo de φ en serie de Fourier, tenían un sentido intuitivo evidente desde el momento en que se suponía que φ era continua y monótona a trozos[2]. También Dirichlet se limita en principio a estas funciones en la célebre memoria ([*92*], t. I, pp. 117-132) en la que establece la convergencia de la serie de Fourier, pero ya al final de su trabajo se preocupa de la extensión de sus resultados a clases más amplias de funciones. Es sabido que fue en esta ocasión cuando Dirichlet, precisando las ideas de Fourier, define la noción general de función tal y como se entiende hoy; el primer punto a dilucidar era naturalmente el de saber en qué casos seguía siendo posible dar un sentido a las fórmulas (1). «*Cuando las soluciones de continuidad* [de φ] *son infinitas...*», dice Dirichlet (*loc. cit.*, pp. 131-132), «*es necesario que entonces la función* $\varphi(x)$ *sea tal que, si designamos por a y b dos cantidades cualesquiera comprendidas entre* $-\pi$ *y* $+\pi$, *puedan encontrarse siempre otras cantidades r y s entre a y b lo bastante próximas para que la función sea continua en el intervalo entre r y s. Se sentirá fácilmente la necesidad de esta restricción al considerar que los diferentes términos de la serie* [de Fourier] *son integrales definidas y remontándose a la noción fundamental de integral. Se verá entonces que la integral de una función no tiene otro significado que el de que la función satisface la condición enunciada anteriormente.*»

En términos modernos, Dirichlet parece creer que la integrabilidad es equivalente al hecho de que los puntos de discontinuidad formen un conjunto «diseminado», y señala además, algunas líneas más abajo, el célebre ejemplo de la función igual a c para x racional y a un valor d distinto para x irracional, y afirma que esta función

como x o x^2, y las fórmulas (1) figuran ya en un trabajo de Clairaut de 1754 y en una memoria de Euler de 1777. Pero allí donde el siglo XVIII, a falta de una noción clara de lo que significa un desarrollo en serie, dejaba de lado estos resultados y conservaba intacta la creencia en la imposibilidad de obtener tales desarrollos para las funciones «discontinuas», Fourier, por el contrario, proclama que sus desarrollos son convergentes «*cualquiera que pueda ser la curva dada que responda a* $\varphi(x)$, *bien sea que se le pueda asignar una ecuación analítica, bien sea que no dependa de ninguna ley regular*» ([*112*], t. I. p. 210).

[2] Para Fourier la integral se define todavía recurriendo a la noción de área; recordemos que la definición analítica de la integral no aparece hasta Cauchy (cf. página 272).

«*no podría sustituirse*» en la integral. Dirichlet anunciaba también trabajos posteriores sobre este tema, pero dichos trabajos nunca fueron publicados[3], y, durante veinticinco años, nadie parece haber intentado avanzar por este camino debido a que la consideración de funciones tan «patológicas» parecía en aquella época totalmente desprovista de interés; en todo caso, cuando Riemann, en 1854 ([*259* a], pp. 227-264), vuelve a considerar la cuestión (siempre a propósito de las series trigonométricas[4]), siente la necesidad de justificar su trabajo: «*Cualquiera que sea nuestra ignorancia respecto a la manera según la cual las fuerzas y los estados de la materia varían con el tiempo y el lugar en el infinitamente pequeño, podemos tener por seguro que las funciones a las que no son aplicables los resultados de Dirichlet no intervienen en los fenómenos naturales. Sin embargo* —continúa— *parece que estos casos no tratados por Dirichlet son dignos de atención por dos razones. Primeramente, como señala el mismo Dirichlet al final de su trabajo, este tema está muy estrechamente relacionado con los principios del cálculo infinitesimal, y puede servir para aportar mayor claridad y seguridad a estos principios. Desde este punto de vista, su estudio tiene un interés inmediato. En segundo lugar, la aparición de las series de Fourier no se limita a los trabajos de física, hoy día son aplicadas también con éxito en un dominio de las matemáticas puras, la teoría de números, y parece que aquí son precisamente las funciones cuyo desarrollo en serie trigonométrica no ha sido estudiado por Dirichlet las que ofrecen interés*» ([*259* a], pp. 237-238).

La idea de Riemann es la de partir del procedimiento de aproximación de la integral, cuya importancia fue señalada por Cauchy, y determinar cuándo las «sumas de Riemann» de una función f, en un intervalo acotado $[a, b]$ tienden hacia un límite (cuando la longitud máxima de los subintervalos de la división tiende hacia 0), problema cuya solución obtiene sin gran trabajo en la siguiente

[3] Según algunas indicaciones (bastante oscuras) de Lipschitz [*205* a], Dirichlet habría creído tal vez que si el conjunto de los puntos de discontinuidad es «diseminado», su «derivado» es finito, y en todo caso habría limitado sus trabajos al caso en que es así.

[4] Desde Dirichlet y Riemann hasta nuestros días podremos ver cómo continúa esta estrecha asociación entre la integración y lo que nosotros llamamos ahora «análisis armónico», que constituye de alguna manera su piedra de toque.

forma: para cada $\alpha > 0$ existe una subdivisión de $[a, b]$ en intervalos parciales de longitud máxima suficientemente pequeña para que la suma de las longitudes de los intervalos de esta subdivisión en los que la oscilación de f es $> \alpha$, sea arbitrariamente pequeña. Y demuestra además que esta condición es verificada no solamente por las funciones continuas y monótonas a trozos, sino también por funciones que pueden tener un conjunto de puntos de discontinuidad denso[5].

La memoria de Riemann no fue publicada hasta 1867, después de su muerte. Pero, esta vez, la época era más favorable a este tipo de investigaciones, y la «integral de Riemann» ocupó de modo natural su lugar dentro de la corriente de ideas que llevaba entonces a un estudio a fondo del «continuo» y de las funciones de variables reales (Weierstrass, du Bois-Reymond, Hankel, Dini) y que culminaría, con Cantor, en el surgimiento de la teoría de conjuntos. La forma dada por Riemann a la condición de integrabilidad sugería la idea de la «medida» del conjunto de puntos de discontinuidad de una función en un intervalo, pero todavía deberían transcurrir treinta años antes de que se llegase a dar una definición fecunda y cómoda de esta noción.

Los primeros intentos en esta dirección se deben a Stolz, Harnack y Cantor (1884-1885); para definir la «medida» de una parte E acotada de **R**, los dos primeros consideran conjuntos $F \supset E$ que sean uniones *finitas* de intervalos, toman para cada F la suma de las longitudes de los intervalos correspondientes, y llaman «medida» de E al extremo inferior de estos números; mientras que Cantor, situándose ya desde el principio en $\mathbf{R}^n$, considera, para un conjunto E acotado y para $\rho > 0$ el entorno $V(\rho)$ de E formado por los puntos cuya distancia a E es $\leq \rho$, y toma el extremo inferior del «volumen» de $V(\rho)$[6]. Con esta definición resulta que la «medida» de

[5] Por el contrario, H. J. Smith dio ya en 1875 el primer ejemplo de una función no integrable en el sentido de Riemann y cuyo conjunto de puntos de discontinuidad es «diseminado» ([*287*], t. II, pp. 86-100).

[6] Cantor no da una definición precisa de este «volumen» y se limita a decir que puede calcularse mediante una integral múltiple ([*47*], pp. 229-236 y 257-258). Se ve fácilmente, aplicando el teorema de Borel-Lebesgue, que su definición equivale a la de Stolz-Harnack.

un conjunto es igual a la de su adherencia, de donde se deduce en particular que la «medida» de la unión de dos conjuntos sin puntos comunes puede ser estrictamente inferior a la suma de las «medidas» de estos dos conjuntos. Sin duda para paliar esta última dificultad, Peano [*246* a] y Jordan ([*174* c], t. I, pp. 28-31), algunos años después, introducen, al lado de la «medida» de Cantor $\mu(A)$ de un conjunto A contenido en un «rectángulo» I, su «medida interior» $\mu(I) - \mu(I - A)$ y llaman «medibles» a los conjuntos A (que ahora llamamos «cuadrables») para los cuales estos dos números coinciden. La unión de dos conjuntos cuadrables A y B sin puntos comunes es entonces cuadrable y tiene como «medida» la suma de las «medidas» de A y B, pero un conjunto abierto y acotado no es necesariamente cuadrable, y el conjunto de los números racionales contenidos en un intervalo acotado tampoco lo es, lo que quitaba mucho interés a la noción de Peano-Jordan.

A E. Borel corresponde el mérito de haber sabido discernir los defectos de las definiciones anteriores y de haber visto la forma de remediarlos [*32* a]. Se sabía desde Cantor que todo conjunto abierto U de **R** es la unión de la familia numerable de sus «componentes», intervalos abiertos tales que dos cualesquiera de ellos no tienen ningún punto común; en vez de intentar aproximar U «desde fuera», encerrándolo en una sucesión finita de intervalos, Borel, apoyándose en el resultado anterior, propone tomar como medida de U (cuando U es acotado) la suma de las longitudes de sus componentes. Después describe muy sumariamente[7] las clases de conjuntos (llamados más tarde «borelianos») que se pueden obtener a partir de los conjuntos abiertos, iterando indefinidamente las operaciones de unión numerable y de «diferencia» $A - B$, e indica que, para estos conjuntos, se puede definir una medida que posee la propiedad fundamental de la *aditividad completa*: si una sucesión (A_n) está formada por conjuntos borelianos disjuntos dos a dos, la medida de su unión (supuesto que es acotada) es igual a la suma de sus medidas.

Esta definición debía inaugurar una nueva era del Análisis: por

[7] En este momento la medida no es todavía para Borel más que un medio técnico con vistas al estudio de ciertas series de funciones racionales, y él mismo subraya que, para el fin que se propone, la utilidad de la medida reside sobre todo en el hecho de que un conjunto de medida no nula no es numerable ([*32* a], p. 48).

una parte, en relación con los trabajos contemporáneos de Baire, era el punto de partida de toda una serie de trabajos de naturaleza topológica acerca de la clasificación de los conjuntos de puntos (véase p. 226), y, sobre todo, serviría de base para la extensión de la noción de integral, llevada a cabo por Lebesgue en los primeros años del siglo XX.

En su tesis [*196* a], Lebesgue comienza por desarrollar y precisar las sucintas indicaciones de E. Borel; a imitación del método de Peano-Jordan, la «medida exterior» de un conjunto acotado $A \subset \mathbf{R}$ se define como el extremo inferior de las medidas de los conjuntos abiertos que contienen A; después, si I es un intervalo que contiene a A, la «medida interior» de A es la diferencia entre las medidas exteriores de I y de $I - A$; de este modo se obtiene una noción de «conjunto medible» que solamente difiere de la definición «constructiva» inicial de Borel por el hecho de añadir una parte de un conjunto de medida nula en el sentido de Borel. Esta definición se extendía inmediatamente a los espacios $\mathbf{R}^n$; la antigua concepción de la integral definida $\int_a^b f(t)dt$ de una función acotada y ≥ 0 como «área» limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$, proporcionaba entonces una extensión inmediata de la integral de Riemann a todas las funciones f para las que estuviese definida la medida del conjunto precedente. Pero la originalidad de Lebesgue no reside tanto en la idea de esta extensión[8] como en su descubrimiento del teorema fundamental sobre el paso al límite en la integral así concebida, teorema que aparece en él como consecuencia de ser la medida completamente aditiva[9]; Lebesgue se da cuenta inmediatamente de su importancia y hace de él la piedra angular de la exposición didáctica de su teoría que realiza en 1904 en sus célebres «*Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*» («Lecciones sobre la integración y el cálculo de funciones primitivas») [*196* c][10].

No podemos aquí detenernos a describir detalladamente los inumerables progresos que supondrían los resultados de Lebesgue en el estudio de los problemas clásicos del Cálculo infinitesimal. El mismo había aplicado ya, en su tesis, su teoría a la extensión de las nociones clásicas de longitud y de área a conjuntos más generales que las curvas y superficies usuales; acerca del considerable desarrollo de esta teoría desde hace medio siglo remitimos al lector a la exposición reciente de L. Cesari [*59*]. Mencionemos también las aplicaciones a las series trigonométricas, desarrolladas por Lebesgue casi inmediatamente después de su tesis [*196* b], y que abrirían nuevos horizontes en esta teoría, cuya exploración está lejos de haberse terminado (véase [*345*]). Por último, y fundamentalmente, la definición de los espacios L^p y el teorema de Fischer-Riesz ([*111*], [*260* a y c]; cf. p. 293) ponían en evidencia el papel que podía tener en el Análisis funcional la nueva noción de integral, papel que no haría otra cosa que crecer con las generalizaciones posteriores de esta noción, de las que hablaremos dentro de un momento.

Antes de esto nos detendremos un poco más extensamente en uno de los problemas a los que Lebesgue dedicó más esfuerzos, la relación entre las nociones de integral y de primitiva. Con motivo de la generalización de la integral introducida por Riemann se había planteado de un modo natural la cuestión de saber si la correspondencia clásica entre integral y primitiva, válida para las funciones continuas, seguía siéndolo en casos más generales. Es fácil sin embargo dar ejemplos de funciones f integrables en el sentido de Riemann y tales que $\int_a^x f(t)dt$ no tenga derivada (ni siquiera derivada a la

[8] Independientemente de Lebesgue, W. H. Young había tenido esta misma idea para las funciones semicontinuas [*339* a].

[9] El caso particular de este teorema, considerando una sucesión de funciones integrables en el sentido de Riemann en un intervalo compacto, uniformemente acotadas, y cuyo límite es integrable en el sentido de Riemann, había sido demostrado por Arzelà [*9* a].

[10] Entre las consecuencias más importantes de este teorema en la teoría general de la integración, hay que señalar en particular el teorema de Egoroff sobre la convergencia de sucesiones de funciones medibles [*99*], precisando observaciones anteriores de Borel y Lebesgue. Por otra parte, las funciones medibles (numéricas) habían sido primeramente definidas por Lebesgue por la propiedad de que, para una función f de esta clase, la imagen recíproca por f de todo intervalo de $\mathbf{R}$ es un conjunto medible. Pero ya en 1903, Borel y Lebesgue habían llamado la atención sobre las propiedades topológicas de estas funciones, a las que Vitali dio su forma definitiva, formulando en 1905 [*320* a] la propiedad de las funciones medibles conocida ordinariamente con el nombre de «teorema de Lusin» (que volvió a encontrarlo en 1912).

derecha o a la izquierda) en ciertos puntos; recíprocamente, Volterra había mostrado en 1881 que una función $F(x)$ puede tener una derivada acotada en un intervalo I, pero no integrable (en el sentido de Riemann) en I. Mediante un análisis extraordinariamente sutil (para el que no era suficiente, ni mucho menos, el teorema del paso al límite en la integral), Lebesgue consiguió demostrar que, si f es integrable (en su sentido) en $[a, b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ tiene en casi todo punto una derivada igual a $f(x)$ [*196* c]. Recíprocamente, si una función g es derivable en $[a, b]$ y si su derivada $g' = f$ *es acotada*, entonces f es integrable y se tiene la fórmula $g(x) - g(a) = \int_a^x f(t)dt$. Pero Lebesgue señala que el problema es mucho más complejo cuando g' no es acotada; en este caso g' no es necesariamente integrable, y el primer problema era por tanto el de caracterizar las funciones continuas g para las que g' existe en casi todo punto y es integrable. Limitándose al caso en que uno de los «números derivados»[11] de g es siempre *finito*, Lebesgue mostró que g es entonces necesariamente una función de *variación acotada*[12]. Finalmente establece una recíproca de este último resultado: una función de variación acotada g admite en casi todo punto una derivada, y g' es integrable, pero ya no se tiene necesariamente

(2) $$g(x) - g(a) = \int_a^x g'(t)dt\,;$$

la diferencia entre los dos miembros de esta relación es una función de variación acotada no constante y su derivada es nula en casi

[11] Los números derivados a la derecha de g en el punto x son los dos límites $\limsup_{h\to 0,\, h>0} (g(x + h) - g(x))/h$, $\liminf_{h\to 0,\, h>0} (g(x + h) - g(x))/h$. Los números derivados a la izquierda se definen del mismo modo.

[12] Estas funciones habían sido introducidas por Jordan a propósito de la rectificación de las curvas [*174* c]. Jordan demostró que se puede dar de ellas las dos definiciones equivalentes siguientes: *a*) f es diferencia de dos funciones crecientes; *b*) para toda subdivisión del intervalo $[a, b]$ mediante una sucesión finita creciente de puntos $(x_i)_{0\leq i\leq n}$, con $a = x_0$, $b = x_n$, la suma $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ está acotada por un número independiente de la subdivisión considerada. El extremo superior de estas sumas es la *variación total* de f en $[a, b]$.

todo punto (función «singular»). Faltaba caracterizar las funciones de variación acotada g tales que se verifique la relación (2). Lebesgue estableció que estas funciones (llamadas «absolutamente continuas» por Vitali, que las estudió detalladamente) son aquellas que poseen la propiedad siguiente: la variación total de g en un conjunto abierto U (suma de las variaciones totales de g en cada una de las componentes conexas de U) tiende a 0 con la medida de U.

Veremos más abajo cómo estos resultados, bajo una forma más débil, adquirirían más tarde un alcance mucho más general. En su forma inicial, su campo de aplicación era bastante restringido, y no superaba el marco de la teoría «fina» de las funciones de variables reales, cuyo desarrollo posterior no estudiaremos aquí, nos contentaremos con mencionar los profundos trabajos de Denjoy y de sus competidores y continuadores (Perron, de la Vallée-Poussin, Khintchine, Lusin, Banach, etc.); el lector encontrará una exposición detallada en el libro de S. Saks [*268*].

Uno de los avances esenciales aportados por la teoría de Lebesgue se refiere a las integrales múltiples. Esta noción había sido introducida hacia mediados del siglo XVIII, y lo fue primeramente en la forma de «integral indefinida» (por analogía con la teoría de la integral para las funciones de una variable, $\iint f(x,y)dxdy$ designa una solución de la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y)$) pero ya en 1770 tiene Euler una concepción muy clara de la integral doble extendida a un dominio acotado (limitado por arcos de curvas analíticas), y escribe correctamente la fórmula que permite calcular una integral de este tipo mediante dos integrales simples sucesivas ([*108* a] (1), t. XVII, pp. 289-315). No era difícil justificar esta fórmula a partir de «sumas de Riemann» mientras la función integrada fuese continua y el dominio de integración no demasiado complicado, pero a partir del momento en que se querían abordar casos más generales, el procedimiento de Riemann encontraba serias dificultades ($f(x, y)$ puede ser integrable en el sentido de Riemann sin que $\int dx \int f(x, y)dy$ tenga sentido, considerando las integrales simples en el sentido de Riemann). Estas dificultades desaparecen cuando se pasa a la definición de

Lebesgue; ya este último había mostrado en su tesis que, cuando $f(x, y)$ es una «función de Baire» acotada, también lo son las funciones $y \to f(x, y)$ (para todo x) y $x \to \int f(x, y)dy$, y se tiene la fórmula

$$(3) \qquad \iint f(x, y)dxdy = \int dx \int f(x, y)dy$$

(integral tomada sobre un rectángulo). Un poco más tarde, Fubini aporta [*121*] un complemento importante a este resultado demostrando que, si se supone solamente que f es integrable, entonces el conjunto de las x tales que $y \to f(x, y)$ no es integrable, es de medida nula, lo que permitía extender inmediatamente la fórmula (3) a este caso.

Finalmente, en 1910 [*196* e], Lebesgue aborda la extensión a las integrales múltiples de sus resultados acerca de las derivadas de las integrales simples. De este modo, asocia a una función f, integrable en toda parte compacta de $\mathbf{R}^n$, la *función de conjunto* $F(E) = \int_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$, definida para toda parte integrable E de $\mathbf{R}^n$, que generaliza el concepto de «integral indefinida», y señala con este motivo que esta función posee las dos propiedades siguientes: 1.º es completamente aditiva; 2.º es «absolutamente continua» en el sentido de que F(E) tiende a 0 con la medida de E. La parte fundamental de la memoria de Lebesgue consiste en demostrar la proposición recíproca de ésta[13]. Pero no se detiene aquí, y, siguiendo en la misma dirección, hace notar la posibilidad de generalizar la noción de función de variación acotada, considerando las funciones de conjunto medible F(E) completamente aditivas y tales que $\sum_n |F(E_n)|$ permanezca acotada para toda partición numerable de E en partes medibles E_n. Y, si bien se limita a considerar solamente funciones de esta clase en el conjunto de los «rectángulos» de $\mathbf{R}^n$, está bien claro que solamente había que dar un paso para llegar a

[13] La principal herramienta para esta demostración es un teorema de recubrimiento demostrado algún tiempo antes por Vitali [*320* b], y que sigue siendo fundamental en este tipo de cuestiones.

la noción general de medida que va a definir J. Radon en 1913, englobando en una misma síntesis la integral de Lebesgue y la integral de Stieltjes, de la que vamos a hablar ahora.

En 1894, T. Stieltjes publica, con el título «Recherches sur les fractions continues» («Investigaciones sobre las fracciones continuas») [*297*], una memoria muy original, en la que, a partir de una cuestión aparentemente muy particular, se planteaban y resolvían, con gran elegancia, problemas de naturaleza completamente nueva en la teoría de funciones analíticas y en la de funciones de una variable real[14]. Buscando una representación del límite de una cierta sucesión de funciones analíticas, Stieltjes, entre otros, se había visto llevado a introducir, sobre la recta, el concepto de una «distribución de masa» positiva, noción familiar desde mucho antes en las ciencias físicas, pero que hasta entonces solamente había sido considerada en matemáticas con una serie de hipótesis restrictivas (en general, la existencia de una «densidad» en todo punto, variando de forma continua); Stieltjes señala que una distribución de este tipo equivale a una función creciente $\varphi(x)$ que da la masa total correspondiente al intervalo de extremos 0 y x para $x > 0$, y esta masa cambiada de signo para $x < 0$, correspondiendo las discontinuidades de φ a las masas «concentradas en un punto»[15]. Stieltjes forma entonces, para una distribución de este tipo en un intervalo $[a, b]$, las «sumas de Riemann» $\sum_i f(\xi_i)(\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i))$ y demuestra que, cuando f es continua en $[a, b]$, estas sumas tienden hacia un límite que designa por $\int_a^b f(x)d\varphi(x)$. No necesitando integrar más que funciones continuas (e incluso derivables), Stieltjes no llevó más adelante el estudio de esta integral[16], y esta noción no pareció atraer la atención durante

[14] Es aquí donde, entre otros, se formula y resuelve el célebre «problema de los momentos» (cf. 296).

[15] Stieltjes no hace todavía distinción entre los distintos tipos de intervalos con los mismos extremos a, b, lo que le lleva a considerar que en los puntos de discontinuidad c de φ, una parte de la masa concentrada en c pertenece al intervalo de origen c, y otra al intervalo de extremo c, según el valor de $\varphi(c)$.

[16] Hay que señalar, sin embargo, la primera aparición, en Stieltjes, de la idea de «convergencia» de una sucesión de medidas ([*297*], p. 95; se trata de hecho del límite *fuerte*).

diez años[17]. Pero en 1909, F. Riesz [*260* d], al resolver un problema planteado algunos años antes por Hadamard (cf. p. 293), demostraba que las integrales de Stieltjes $f \to \int_a^b f d\varphi$ son los funcionales lineales continuos más generales sobre el espacio $\mathscr{C}(I)$ de las funciones numéricas continuas sobre el intervalo $I = [a, b]$ (estando dotado $\mathscr{C}(I)$ de la topología de la convergencia uniforme[18]), y la elegancia y sencillez de este resultado suscitaron inmediatamente diversas generalizaciones. La más feliz fue la de Radon, en 1913 [*256*]: combinando las ideas de F. Riesz y de Lebesgue, mostró la forma de definir una integral mediante los procedimientos de Lebesgue partiendo de una «función de conjunto completamente aditiva» cualquiera (definida sobre los conjuntos medibles para la medida de Lebesgue) en vez de partir de la medida de Lebesgue. En la noción de «medida de Radon» sobre $\mathbf{R}^n$ así definida estaba «incluida» la de función «de variación acotada»: la descomposición de una función de variación acotada en diferencia de dos funciones crecientes es un caso particular de la descomposición de una medida en diferencia de dos medidas positivas; igualmente, la «medida de base μ» corresponde a la noción de función «absolutamente continua», y la descomposición de una medida cualquiera en una medida de base μ y una medida «singular», a la descomposición de Lebesgue de una función de variación acotada en suma de una función absolutamente continua y una función «singular». Además, Radon demostró que la «densidad» respecto a μ de una medida de base μ sigue existiendo cuando μ es una medida que tiene como base la medida de Lebesgue, utilizando una idea anterior de F. Riesz (recogida y popularizada más tarde por J. von Neumann, entre otros), que consiste en construir una imagen de la medida μ por medio de una aplicación θ de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}$, elegida de tal modo que $\theta(\mu)$ sea la medida de Lebesgue sobre $\mathbf{R}$.

[17] Sin embargo, toma importancia con el desarrollo de la teoría espectral de operadores, a partir de 1906, por Hilbert y su escuela. Con este motivo define Hellinger, hacia 1907, integrales tales como la que designaba $\int \frac{(dg)^2}{df}$, que parecían en principio más generales que la de Stieltjes, pero de hecho Hahn mostró, ya en 1912, que se reducían a esta última.

[18] Es también en este trabajo donde aparece la noción de límite *vago* de una sucesión de medidas ([*260* d], p. 49).

Casi inmediatamente después de la aparición de la memoria de Radon, Fréchet señalaba que casi todos los resultados de este trabajo podían extenderse al caso en que la «función de conjunto completamente aditiva», en vez de estar definida para las partes medibles de $\mathbf{R}^n$, está definida para ciertas partes de un conjunto E cualquiera (estas partes deben ser tales que las operaciones de unión numerable y de «diferencia» den lugar a conjuntos para los que esté definida la función). Sin embargo, la expresión de una medida de base μ en la forma $g.\mu$ se apoyaba en Lebesgue y Radon en razonamientos en los que intervenía de modo decisivo la topología de $\mathbf{R}^n$ (y hemos visto que la demostración de Radon es válida solamente si μ es una medida que tiene como base la medida de Lebesgue), y hasta 1930 no obtiene O. Nikodym [*235*] este teorema en su forma general mediante un razonamiento directo (notablemente simplificado algunos años después por J. von Neumann gracias al empleo de las propiedades de los espacios L^2 ([*324* g], pp. 127-130)).

Con la memoria de Radon la teoría general de la integración podía considerarse como terminada en sus grandes líneas; entre los avances esenciales posteriores solamente podemos citar la definición de producto infinito de medidas, debido a Daniell [*79* b], y la de integral de una función con valores en un espacio de Banach, dada por Bochner en 1933 [*24* a], que anunciaba el estudio más general de la «integral débil» desarrollado algunos años después por Gelfand [*125* a], Dunford y Pettis ([*95*] y [*96*]). Pero todavía había que popularizar la nueva teoría y convertirla en una herramienta matemática de uso corriente, en tanto que la mayoría de los matemáticos, hacia 1910, consideraban únicamente la «integral de Lebesgue» como un instrumento de alta precisión y de delicado manejo, destinado solamente a trabajos de sutileza y abstracción extremadas. Esta fue la obra de Carathéodory, en un libro que se consideró durante mucho tiempo como un clásico [*49*] y que enriqueció además la teoría de Radon con numerosas observaciones originales.

Pero es también en este libro cuando, por primera vez, la noción de integral, que había sido una de las preocupaciones principales de Lebesgue (como lo ponen suficientemente de manifiesto los títulos de su tesis [*196* a] y su principal obra sobre estas cuestiones [*196* c]), cede la primacía a la de medida, que para Lebesgue (como antes para Jordan) solo había sido un medio técnico auxiliar. Este cambio de

punto de vista se debía, sin duda, en Carathéodory a la excesiva importancia que parece haber concedido a las «medidas p-dimensionales»[19]. A partir de entonces los autores que se han ocupado de la integración se han dividido entre estos dos puntos de vista, no sin originar una serie de debates que han hecho correr mucha tinta, ya que no mucha sangre. Los unos han seguido a Carathéodory; en sus exposiciones cada vez más abstractas y axiomatizadas, la medida, con todos los refinamientos técnicos a los que se presta, no solamente desempeña el papel principal, sino que tiende a perder contacto con las estructuras topológicas a las que está en realidad ligada en la mayor parte de los problemas en que interviene. Otras exposiciones siguen, más o menos, un método ya indicado en 1911 por W. H. Young en una memoria desgraciadamente poco conocida [*339* b] y desarrollado después por Daniell. El primero, al tratar la integral de Lebesgue, partía de la «integral de Cauchy» de las funciones continuas con soporte compacto, que se suponía conocida, para definir sucesivamente la integral superior de las funciones semicontinuas inferiormente y, después de las funciones numéricas cualesquiera, obteniéndose de esta manera una definición de las funciones integrables, calcada sobre la de Lebesgue para los conjuntos, por medios únicamente «funcionales». Daniell, en 1918 ([*76* a]; cf. [*207*]) extendió esta exposición, con algunas modificaciones, a funciones definidas en un conjunto cualquiera; dentro del mismo orden de ideas (y estrechamente relacionada con los métodos empleados en teoría espectral antes de Gelfand) debemos señalar también la memoria de F. Riesz [*260* h] que expone en una forma concisa y elegante los resultados de la teoría de los espacios ordenados que intervienen en la teoría de la Integración.

Más que en lo relativo a las obras expositivas, más o menos agradables de leer, pero cuyo contenido sustancial no podía variar demasiado, es en lo que se refiere a las aplicaciones donde debemos buscar los progresos realizados por la teoría de la integración des-

[19] Se trata aquí de la generalización de la noción de «longitud de una curva plana» a valores cualesquiera n y p de las dimensiones del espacio ambiente y del espacio estudiado; se supone, desde luego, que se tiene $0 \leq p \leq n$, pero no se supone siempre que p sea entero. Esta cuestión ha sido objeto de los trabajos de numerosos autores desde Minkowski, Carathéodory y Hausdorff; el mismo Lebesgue, que aborda algunos casos particulares en su tesis, no parece haber visto en él más que una ocasión de poner a prueba la potencia de las herramientas que acababa de forjar.

de 1920: teoría de la probabilidad (en otro tiempo pretexto para adivinaciones y paradojas, y que se ha convertido en una rama de la teoría de la Integración desde su axiomatización por Kolmogorov [*183*], pero en una rama autónoma con sus métodos y problemas propios); teoría ergódica; teoría espectral y análisis armónico, desde el descubrimiento por Haar de la medida que lleva su nombre, y el movimiento de ideas provocado por este descubrimiento ha hecho de la integral uno de los instrumentos más importantes en la teoría de grupos.

MEDIDA DE HAAR. CONVOLUCION

Las nociones de longitud, de área y de volumen están esencialmente ligadas, en los griegos, a su *invariabilidad* por los desplazamientos: «Las cosas que coinciden (εφαρμοξοντα) son iguales» (*Euclides, El.*, Libro I, «Noción común» 4); mediante un empleo ingenioso de este principio se obtienen todas las fórmulas que dan las áreas o los volúmenes de las «figuras» clásicas (polígonos, cónicas, poliedros, esferas, etc.), bien empleando procedimientos de descomposición finita, bien por el «método exhaustivo»[1]. En lenguaje moderno puede decirse que lo que hacen los geómetras griegos es demostrar la existencia de «funciones de conjunto» aditivas e invariantes por desplazamientos, pero definidas solamente para conjuntos de un

[1] Se puede demostrar que si dos polígonos planos P, P′ tienen la misma área, existen dos polígonos $R \supset P$, $R' \supset P'$, cada uno de los cuales puede descomponerse en un número finito de polígonos R_i (resp. R'_i) $(1 \leq i \leq m)$ sin puntos interiores comunes, y tales que R_i y R'_i se obtienen uno a partir de otro mediante un desplazamiento (dependiente de i) y tales que R (resp. R′) sea unión de una familia finita de polígonos S_j (resp. S'_j) $(0 \leq j \leq n)$ sin puntos interiores comunes, con $S_0 = P$, $S'_0 = P'$, obteniéndose S'_j a partir de S_j mediante un desplazamiento para $1 \leq j \leq n$. Por el contrario, M. Dehn ha mostrado [*81*] que esta propiedad deja de ser válida para el volumen de los poliedros, y que los procedimientos «exhaustivos» empleados desde Eudoxio eran por consiguiente insoslayables.

tipo muy especial. Puede entonces considerarse que el Cálculo integral responde a la necesidad de ampliar el dominio de definición de estas funciones de conjunto y, de Cavalieri a H. Lebesgue, ésta será una de las preocupaciones principales de los analistas. La propiedad de invariabilidad por desplazamientos pasa en cambio a segundo plano, al haberse convertido en una consecuencia trivial de la fórmula general de cambio de variables en las integrales dobles y triples, y del hecho de que una transformación ortogonal tiene un determinante igual a ± 1. Incluso en las geometrías no euclídeas (en las que, sin embargo, el grupo de los desplazamientos es diferente) el punto de vista sigue siendo el mismo: de forma general, Riemann define los elementos infinitesimales de área o de volumen (o sus análogos para las dimensiones ≥ 3) a partir de un ds^2 mediante las fórmulas euclídeas clásicas, y su invariabilidad por las transformaciones que dejan invariantes el ds^2 es entonces casi una tautología.

Hasta 1890, no aparecen otras extensiones menos inmediatas de la noción de medida invariante por un grupo, con el desarrollo de la teoría de los *invariantes integrales*, sobre todo por H. Poincaré y E. Cartan. H. Poincaré se limita a considerar grupos uniparamétricos operando sobre una parte del espacio, mientras que E. Cartan se interesa principalmente por los grupos de desplazamientos, pero operando sobre espacios distintos de aquel en el que están definidos. Por ejemplo, determina de este modo, entre otros ([*52* a], t. II_1, pp. 265-302) la medida invariante (para el grupo de los desplazamientos) en el espacio de las rectas de $\mathbf{R}^2$ o de $\mathbf{R}^3$[2], señalando además que en general los invariantes integrales para un grupo de Lie no son otra cosa que invariantes diferenciales particulares y que, por tanto es posible la determinación de todos ellos por los métodos de Lie. No parece, sin embargo, que se hubiese pensado en considerar ni en utilizar una medida invariante sobre el grupo mismo antes del trabajo fundamental de A. Hurwitz, en 1897 [*168*]. Intentando obtener los polinomios (sobre $\mathbf{R}^n$) invariantes para el grupo ortogonal, Hurwitz parte de la observación de que para un grupo finito de trans-

[2] La medida invariante sobre el espacio de las rectas del plano ya había sido determinada en lo esencial con motivo de problemas de «probabilidades geométricas», sobre todo por Crofton, cuyos trabajos probablemente no eran conocidos por E. Cartan en esta época.

formaciones lineales el problema se resuelve inmediatamente tomando la *media* de las transformadas $s.P$ de un polinomio cualquiera P por todos los elementos del grupo, lo que le sugiere la idea de remplazar, para el grupo ortogonal, la media por una integral relativa a una medida invariante. Hurwitz da explícitamente la expresión de esta última empleando la representación paramétrica mediante los ángulos de Euler, pero observa inmediatamente (independientemente de E. Cartan) que los métodos de Lie aseguraban la existencia de una medida invariante para todo grupo de Lie. Las ideas de Hurwitz no tuvieron un eco inmediato, a causa tal vez del declinar de la teoría de los invariantes a principios del siglo XX y solo se empezaría a reconocer su valor a partir de 1924 con la extensión a los grupos de Lie compactos, por I. Schur y H. Weyl, de la teoría clásica de Frobenius (pp. 168-169) sobre las representaciones lineales de los grupos finitos. El primero se limita al caso del grupo ortogonal y muestra cómo el método de Hurwitz permite extender las relaciones clásicas de ortogonalidad de los caracteres, idea que H. Weyl combina con los trabajos de E. Cartan sobre las álgebras de Lie semisimples para obtener la expresión explícita de los caracteres de las representaciones irreducibles de los grupos de Lie compactos y el teorema de reducibilidad completa [*331* b] y, después, mediante una atrevida extensión de la noción de «representación regular», el célebre teorema de Peter-Weyl, en perfecta correspondencia con la descomposición de la representación regular en sus componentes irreducibles de la teoría de los grupos finitos [*332*].

O. Schreier había fundado un año antes la teoría general de los grupos topológicos [*276* a] y, a partir de este momento, era evidente que los razonamientos de la memoria de Peter-Weyl seguían siendo válidos sin modificación para todo grupo topológico sobre el que se pueda definir una «medida invariante». Hay que decir, sin embargo, que las nociones generales sobre la Topología y la medida estaban todavía en esta época en plena formación, y que ni la clase de grupos topológicos sobre los que se podía esperar definir una medida invariante ni los conjuntos para los que esta «medida» estaría definida parecían estar claramente delimitados. Lo único que resultaba evidente era que no podía esperarse extender al caso general los métodos infinitesimales que demostraban la existencia de una medida invariante sobre un grupo de Lie. Pero otra corriente de ideas, surgida de los trabajos

de Lebesgue sobre la medida, llevaba precisamente a métodos de ataque más directos. Hausdorff había demostrado, en 1914, que no existe ninguna función de conjunto aditiva no idénticamente nula definida para *todos* los subconjuntos de $\mathbf{R}^3$ è invariante por desplazamientos, y parecía natural investigar si este resultado seguía siendo válido para $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R}^2$, problema que fue resuelto por S. Banach, de forma sorprendente, en 1923, mostrando que por el contrario tal «medida» existía en estos dos casos [*14* b]. Su procedimiento, muy ingenioso, se apoya ya sobre una construcción por inducción transfinita y sobre la consideración de las «medias» $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x+\alpha_k)$ de trasladadas de una función por elementos del grupo[3]. Ideas del mismo tipo permitieron a A. Haar, en 1933 [*139*], dar el paso decisivo demostrando la existencia de una medida invariante para los grupos localmente compactos con una base numerable de abiertos; inspirándose en el método de aproximación de un volumen, en el Cálculo integral clásico, por yuxtaposición de cubos congruentes de lado arbitrariamente pequeño, obtiene, empleando el procedimiento diagonal, la medida invariante como límite de una sucesión de «medidas aproximadas», procedimiento que, en esencia, sigue siendo utilizado hoy. Este descubrimiento tuvo un gran eco, especialmente porque permitió inmediatamente a J. von Neumann resolver, para los grupos compactos, el famoso «quinto problema» de Hilbert sobre la caracterización de los grupos de Lie mediante propiedades puramente topológicas (con exclusión de toda estructura diferenciable dada previamente). Pero se observó inmediatamente que para poder emplear la medida invariante de modo eficaz, no bastaba con conocer su existencia, sino saber también que era única excepto un factor; este punto fue demostrado primeramente por J. von Neumann para los grupos compactos, utilizando un método de definición de la medida de Haar mediante «medias» de funciones continuas análogas a las de Banach [*324* e], más tarde, J. von Neumann [*324* f] y A. Weil [*330* c], siguiendo métodos diferentes, obtuvieron simultáneamente la unicidad en el caso de los grupos localmente compac-

[3] J. von Neumann mostró, en 1929, que la razón profunda del comportamiento diferente de $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R}^2$ por una parte, y de los $\mathbf{R}^n$ para $n \geq 3$ por otra, residía en la conmutatividad del grupo de las rotaciones del espacio $\mathbf{R}^2$.

tos, indicando al mismo tiempo A. Weil de qué manera podía extenderse el procedimiento de Haar a los grupos localmente compactos cualesquiera. Fue, también, A. Weil quien obtuvo (*loc. cit.*) la condición de existencia de una «medida» relativamente invariante sobre un espacio homogéneo y demostró, por último, que la existencia de una «medida» (dotada de propiedades razonables) sobre un grupo topológico separado implicaba *ipso facto* que el grupo es localmente precompacto. Estos trabajos completaban en lo fundamental la teoría general de la medida de Haar, la única aportación más reciente que debemos citar es la noción de medida cuasi-invariante, que no aparece aislada hasta más o menos 1950, en relación con la teoría de las representaciones de los grupos localmente compactos en los espacios de Hilbert.

La historia del producto de convolución es más compleja. Desde principios del siglo XIX se observó que si, por ejemplo, $F(x, t)$ es una integral de una ecuación en derivadas parciales en x y t, lineal y con coeficientes constantes, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x - s, t)f(s)ds$$

es también una integral de la misma ecuación. Poisson, entre otros, y ya antes de 1820, utiliza esta idea para escribir las integrales de la ecuación del calor en la forma

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4t}\right)f(s)ds.$$

Un poco más tarde, la expresión

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\operatorname{sen}\frac{x-t}{2}} f(t)dt$$

de la suma parcial de una serie de Fourier y el estudio, realizado por Dirichlet, del límite de esta integral cuando n tiende hacia $+\infty$, proporciona el primer ejemplo de «regularización» $f \to \rho_n * f$ sobre

el toro $\mathbf{T}$ (hay que decir que mediante una sucesión de «núcleos» ρ_n no positivos, lo que complica especialmente su estudio). Con el nombre de «integrales singulares», las expresiones integrales análogas serán uno de los temas predilectos de los analistas de finales del siglo XIX y principios del XX, desde P. du Bois-Reymond hasta H. Lebesgue. Sobre $\mathbf{R}$, Weierstrass emplea la integral (1) para la demostración de su teorema de aproximación por polinomios, y con este motivo proporciona el principio general de la regularización mediante una sucesión de «núcleos» positivos ρ_n de la forma $x \to c_n\rho(nx)$. Sobre $\mathbf{T}$, el ejemplo más célebre de regularización mediante núcleos positivos es dado un poco después por Fejér, y a partir de este momento se convierte en el procedimiento standard que intervendrá en la mayor parte de los «métodos de sumación» de las series de funciones.

Sin embargo, estos trabajos, a causa, sin duda, de la disimetría de los papeles desempeñados por el «núcleo» y la función regularizada, no ponían de manifiesto con claridad las propiedades algebraicas del producto de convolución. Fue fundamentalmente Volterra quien atrajo la atención sobre este punto. Volterra estudia, de modo general, la «composición» $F * G$ de dos funciones de dos variables

$$(F * G)(x, y) = \int_x^y F(x, t)G(t, y)dt$$

que considera como una generalización, por «paso de finito a infinito», del producto de dos matrices [*322* a]. Distingue muy pronto el caso (denominado del «ciclo cerrado» a causa de su interpretación en la teoría de la herencia) en que F y G dependen solamente de $y - x$, entonces $H = F * G$ depende solamente de $y - x$, y si escribimos $F(x, y) = f(y - x)$, $G(x, y) = g(y - x)$, se tiene

$$H(x, y) = h(y - x),$$

con

$$h(t) = \int_0^t f(t - s)g(s)ds$$

de tal modo que, para $t \geq 0$, h coincide con la convolución de las funciones f_1, g_1, iguales, respectivamente, a f y g para $t \geq 0$, y a 0 para $t < 0$.

Sin embargo, el formalismo algebraico desarrollado por Volterra, no ponía claramente de manifiesto las relaciones entre la estructura de grupo de **R** y la transformación de Fourier. No vamos a hacer aquí la historia de esta última, pero resulta conveniente observar que a partir de Cauchy, los analistas que se ocupan de la integral de Fourier lo hacen sobre todo en el sentido de encontrar condiciones cada vez más amplias para la validez de las distintas fórmulas de «inversión» y dejan un poco de lado sus propiedades algebraicas. Desde luego, no podría decirse lo mismo de los trabajos del propio Fourier (o de los de Laplace sobre la integral análoga $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$), pero estas transformaciones habían sido introducidas fundamentalmente a propósito de problemas *lineales*, y no resulta, por tanto, demasiado sorprendente que hasta mucho tiempo después no se pensara en considerar el producto de dos transformadas de Fourier (con la excepción del producto de series trigonométricas o de series enteras, pero la relación con la convolución de medidas discretas no podía evidentemente ser vista en el siglo XIX). La primera mención de este producto y de la convolución sobre **R** se encuentra probablemente en una memoria de Tchebychef [*306*], a propósito de cuestiones de cálculo de probabilidades. En efecto, en esta teoría, la convolución $\mu * \upsilon$ de dos «leyes de probabilidad» sobre **R** (medidas de masa total igual a 1) no es otra cosa que la ley de probabilidad «compuesta» de μ y de υ (para la adición de las «variables aleatorias» correspondientes). Desde luego que en Tchebychef se trata únicamente de la convolución de leyes de probabilidad con una densidad (respecto a la medida de Lebesgue), es decir, de la convolución de funciones; y, por otra parte, aparece solamente de una forma episódica, y lo mismo sucederá en los raros trabajos en que aparece antes del período 1920-1930. En 1920, P.-J. Daniell, en una nota poco conocida [*76* c], define la convolución de dos medidas cualesquiera sobre **R** y la trasformada de Fourier de una medida de este tipo, y señala explícitamente que la transformación de Fourier hace pasar de la convolución al producto ordinario, formalismo que va a ser intensamente utilizado por los probabilistas, sobre todo después de P. Lévy. Pero la importancia fundamental de la convolución en la teoría de grupos no es reconocida plenamente hasta 1927 por H. Weyl. H. Weyl se da cuenta de que en un grupo compacto la convolución

de funciones desempeña el papel de la multiplicación en el álgebra de un grupo finito, permitiéndole, por tanto, definir la «representación regular», y al mismo tiempo encuentra en la regularización el equivalente del elemento unidad del álgebra de un grupo finito. Quedaba por realizar la síntesis de todos estos puntos de vista, lo que se llevó a cabo en el libro de A. Weil [*330* c], que serviría de preludio a las generaciones posteriores que construirían, por una parte, las álgebras normadas de I. Gelfand; y, por otra, la convolución de distribuciones.

La medida de Haar y la convolución se convertirían rápidamente en herramientas esenciales dentro de la tendencia a la algebrización que se manifiesta tan fuertemente en el Análisis moderno; en notas posteriores mencionaremos numerosas aplicaciones. Aquí nos limitaremos a señalar la que se refiere a la «variación» de los subgrupos cerrados (y, sobre todo, de los subgrupos discretos) de un grupo localmente compacto. Esta teoría, que parte de un resultado de K. Mahler en Geometría de números, ha sido inaugurada, en 1950, por Chabauty, y ha sido considerablemente desarrollada y profundizada por Macbeath y Swierczkowski [*212*].

INTEGRACION EN LOS ESPACIOS NO LOCALMENTE COMPACTOS

Si bien el estudio de las relaciones entre la topología y la teoría de la medida se remonta a los comienzos de la teoría moderna de las funciones de variables reales, la integración en los espacios topológicos separados no ha sido formulada de una manera satisfactoria hasta hace muy poco tiempo. Antes de dar un panorama histórico de los trabajos que han precedido la síntesis actual, vamos a recordar algunas de las etapas de la evolución de las ideas en lo que a las relaciones entre topología y medida se refiere.

Para Lebesgue, el problema consiste únicamente en integrar funciones de una o varias variables reales. Radon define en 1913 las medidas más generales sobre $\mathbf{R}^n$ y las integrales correspondientes; esta teoría, expuesta con detalle en la obra [*82*] de Ch. de la Vallée Poussin, hace uso constantemente de las propiedades topológicas de los espacios euclídeos. Un poco más tarde, en 1915, Fréchet define en [*115* c] las medidas «abstractas» sobre un conjunto dotado de una tribu, y las integrales correspondientes a dichas medidas, señalando el hecho de que dicho método permite la obtención de los resultados fundamentales de la teoría de Lebesgue sin necesidad de emplear métodos topológicos. Fréchet justifica su tarea con las siguientes palabras (tomadas de la primera parte de la introducción de [*115* d]) *Supongamos, por ejemplo, que en el espacio de una infi-*

nidad de coordenadas, en el que diversas aplicaciones al Análisis han llevado a dar distintas definiciones no equivalentes de sucesión convergente, sustituimos una de estas definiciones por otra. Pues bien, nada cambia en lo que se refiere a las propiedades de las familias y funciones aditivas de conjuntos en estos espacios. Los trabajos de Fréchet son completados por los de Carathéodory, autor de un importante teorema de prolongación de una función de conjunto en una medida. El comienzo del libro de Saks [268] nos ofrece una exposición bastante condensada de este punto de vista.

El descubrimiento de la medida de Haar sobre los grupos localmente compactos (pp. 316-323), y sus numerosas aplicaciones, a las que se añaden posteriormente los trabajos de Weil y Gelfand en Análisis Armónico, dan lugar hacia 1940 a una profunda modificación de este punto de vista: en este tipo de cuestiones, lo más cómodo es considerar una medida como una forma lineal sobre un espacio de funciones continuas. Este método nos obliga a restringirnos a los espacios compactos o localmente compactos, pero esto no constituye ninguna traba para la inmensa mayoría de las aplicaciones y, por el contrario, la introducción del Análisis Armónico sobre los grupos p-ádicos y los grupos de adelos por J. Tate y A. Weil ha dado lugar a una renovación espectacular de la Teoría analítica de Números.

La necesidad de ampliar este punto de vista de tal forma que puedan considerarse medidas sobre espacios topológicos no localmente compactos tiene un origen totalmente diferente. En efecto, el Cálculo de Probabilidades ha ido dando lugar poco a poco al estudio de espacios de este tipo, proporcionando numerosos ejemplos no triviales. Tal vez la razón de la influencia tardía de estas cuestiones sobre la teoría de la medida resida en el relativo aislamiento del Cálculo de Probabilidades, que ha venido ocupando una posición marginal con respecto a las disciplinas matemáticas tradicionales hasta hace muy poco tiempo.

Medidas sobre los espacios de sucesiones

Una de las ramas más desarrolladas del Cálculo de Probabilidades clásico es aquella que se ocupa de los teoremas «de límite» (ley de los grandes números, tendencia hacia la ley de Gauss-Laplace...); se trata en estos casos de una profundización de la noción de regularidad estadística que manifiestan los fenómenos en los que intervienen poblaciones muy numerosas. Para la formulación matemática correcta de estos problemas es necesaria la introducción de medidas sobre los espacios de sucesiones. Estos espacios, que constituyen la generalización más inmediata de los espacios de dimensión finita, constituyen el tema predilecto de los trabajos sobre el «Análisis general» realizados hacia 1920 por Fréchet, Lévy, Lusin, ... No es por otra parte casual que Khintchin y Kolmogoroff, creadores de los nuevos métodos del Cálculo de Probabilidades, sean ambos discípulos de Lusin, ni tampoco que Lévy se orientase pronto hacia los problemas de probabilidades: en efecto, dichos problemas constituían la piedra de toque de los nuevos métodos.

La primera intervención implícita de una medida sobre un espacio de sucesiones tiene lugar en el trabajo consagrado por E. Borel en 1909 a las probabilidades numerables [*32* b]. Borel tiene además una idea muy original, la de aplicar los resultados probabilistas que acaba de obtener a la demostración de las propiedades del desarrollo decimal de «casi todo» número real comprendido entre 0 y 1. Esta aplicación se basa en una observación fundamental: definamos todo número real comprendido entre 0 y 1 por la sucesión de cifras de su desarrollo en una base q dada ($q \geqslant 2$); si echamos a suertes sucesivamente las distintas cifras de un número x, independientemente unas de otras y con una probabilidad igual a $1/q$ para 0, 1, ..., $q-1$, la probabilidad de que x pertenezca a un intervalo de $[0,1[$ es igual a la longitud de dicho intervalo.

En 1923, Steinhaus [*293*] demuestra rigurosamente estos resultados y da una descripción del modelo matemático preciso de la sucesión ilimitada considerada por Borel: tomemos para simplificar $q = 2$, y designemos por **I** el conjunto con dos elementos $\{0, 1\}$, sobre el que definiremos la medida $\mu(0) = \mu(1) = \frac{1}{2}$. Los elementos del espacio producto $\mathbf{I}^N$ son las sucesiones $\varepsilon = (\varepsilon(n))_{n\in N}$ de números iguales a 0 o a 1, y la aplicación $\varepsilon : \varepsilon \to \sum_{n\geq 0} \varepsilon(n).\ 2^{-n-1}$ es, salvo un conjunto numerable, una biyección de $\mathbf{I}^N$ sobre el intervalo $[0,1]$. Además, ε^{-1} transforma la medida de Lebesgue sobre $[0,1]$ en la medida P sobre $\mathbf{I}^N$ producto de la medida μ en cada uno de los factores. En realidad, Steinhaus no construye las medidas producto, sino que utiliza la casi-biyección ε para *construir* la medida P sobre $\mathbf{I}^N$ a partir de la medida de Lebesgue sobre $[0,1]$, y da después una caracterización axiomática de P. El isomorfismo de este modo obtenido nos permite pasar del lenguaje de las probabilidades al de la medida, aplicando entonces los teoremas conocidos referentes a la integral de Lebesgue.

En este mismo trabajo, Steinhaus considera la serie aleatoria $\sum_{n\geq 0} \sigma_n.a_n$, en la que los signos $\sigma_n = \pm 1$ son elegidos al azar, independientemente unos de otros y con la misma probabilidad igual a $\frac{1}{2}$. Otras muchas series aleatorias son consideradas por el mismo Steinhaus entre 1928 y 1935. Por su parte, Paley, Wiener, y Zygmund, consideran series de Fourier aleatorias[1] de la forma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(2\pi i(nt + \Phi_n))$, en las que las amplitudes a_n son fijas y las «fases» Φ_n son variables aleatorias independientes repartidas uniformemente sobre $[0,1]$. Si bien las dificultades analíticas varían enormemente de unos problemas a otros, la traducción en términos de la teoría de la medida es la misma en todos los casos, y representa una extensión del caso considerado por Borel y Steinhaus: se trata de construir sobre $\mathbf{R}^N$ una medida producto de una familia de medidas todas ellas iguales a una misma medida positiva de masa 1 sobre **R**; por ejemplo, las series de Fourier aleatorias que hemos considerado anteriormente corresponden a la situación en que μ es la medida de Lebesgue sobre $[0,1]$.

Existen dos métodos para la construcción de estas medidas producto. El primero es un método directo, formulado por primera vez por Daniell [*76* b] en 1918, y que vuelve a encontrar Jessen [*173*] en 1934, estudiando detalladamente el caso en que μ es la medida

[1] En lo que se refiere a las series de Fourier aleatorias, véase [*176*].

de Lebesgue sobre [0,1]. El segundo consiste en la búsqueda de artificios análogos al de Steinhaus para reducirse al caso de la medida de Lebesgue sobre [0,1]. Este último poseía la ventaja de resultar más cómodo mientras no se dispusiera de una exposición completa de la teoría general de la medida, en tanto que permitía emplear (sin demostrarlos de nuevo) los teoremas de Lebesgue [2].

La teoría del movimiento browniano

Se trata de una teoría que ocupa un lugar excepcional dentro del desarrollo científico contemporáneo, en tanto que testimonio de un intercambio permanente y fecundo entre los problemas físicos y las matemáticas «puras». El movimiento browniano, descubierto en 1829 por el botánico Brown, fue estudiado intensamente durante el siglo XIX por numerosos físicos [3], pero hasta 1905 no fue inventado, por Einstein, el primer modelo matemático satisfactorio. En el caso sencillo de una partícula que se mueve a lo largo de una recta, las hipótesis fundamentales de Einstein se formulan de la manera siguiente: si $x(t)$ es la abscisa de la partícula en el instante t, y si $t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n$, los desplazamientos sucesivos $x(t_i) - x(t_{i-1})$ (para $1 \leqslant i \leqslant n$) son variables aleatorias gaussianas independientes. No es cosa de evocar aquí con detenimiento los importantes trabajos experimentales de J. Perrin que motivó la teoría de Einstein; nos bastará únicamente con recordar la observación de Perrin de que las trayectorias del movimiento browniano le hacían pensar irresistiblemente en las «funciones sin derivada de los matemáticos». Esta será la chispa inicial para Wiener.

Pero hay también otra corriente de ideas que tiene su origen en la teoría cinética de los gases, desarrollada entre 1870 y 1900 por Boltzmann y Gibbs. Consideremos un gas formado por N moléculas de masa m a la temperatura (absoluta) T, y designemos por $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_N$ las velocidades de las N moléculas del gas; la energía cinética del sistema es igual en este caso a

$$\frac{m}{2}(\mathbf{v}_1^2 + \cdots + \mathbf{v}_N^2) = 3\mathrm{N}k\mathrm{T} \tag{1}$$

siendo k la constante de Boltzmann. Según las ideas de Gibbs, la enorme cantidad de choques entre las moléculas no permite determinar con precisión sus velocidades, y resulta conveniente introducir una ley de probabilidad P sobre la esfera S del espacio de dimensión 3N definida por la ecuación (1). La hipótesis «microcanónica» consiste en suponer que P es la medida de masa 1 invariante por rotación sobre la esfera S. Además, la ley de las velocidades de Maxwell nos dice que la ley de probabilidad de una componente de la velocidad de una molécula es una medida gaussiana de variancia $2k\mathrm{T}/m$. Parece que fue E. Borel el primero en señalar, en 1914, que la ley de Maxwell es una consecuencia de las hipótesis de Gibbs y de las propiedades de la esfera, en el caso de que el número de moléculas sea muy grande. Borel considera una esfera en un espacio euclídeo de dimensión «grande», así como la medida P de masa 1 invariante por rotación sobre S, y, utilizando los métodos clásicos de aproximación fundados en la fórmula de Stirling, muestra que la proyección de P sobre un eje de coordenadas es aproximadamente gaussiana. Estos resultados serán precisados algo más tarde por Gâteaux y Lévy [*201* a]. Dados un entero $m \geqslant 1$ y un número $r > 0$, sea $S_{m,r}$ el conjunto de las sucesiones de la forma $(x_1, \cdots, x_m, 0, 0, \cdots)$ verificando la condición $x_1^2 + \cdots + x_m^2 = r^2$, sea igualmente $\sigma_{m,r}$ la medida de masa 1 invariante por rotación sobre $S_{m,r}$. Enunciado en lenguaje moderno, el resultado de Gâteaux y Lévy es el siguiente: la sucesión de medidas $\sigma_{m,1}$ tiende estrictamente hacia la masa unidad en el origen $(0, 0, \cdots)$ y la sucesión de medidas $\sigma_{m,\sqrt{m}}$ tiende estrictamente hacia una medida Γ de la forma

$$d\Gamma(x_1, x_2, \cdots) = \prod_{n=1}^{\infty} d\gamma(x_n)$$

(γ es la medida gaussiana de variancia 1 sobre **R**).

[2] Wiener toma también a menudo la precaución (cf. por ejemplo [*243*], cap. IX) de mostrar que la medida del movimiento browniano es isomorfa a la medida de Lebesgue sobre [0,1]. La posibilidad de esta clase de artificios es explicada por un teorema general de von Neumann que da una caracterización axiomática de las medidas isomorfas a la medida de Lebesgue sobre [0,1].

[3] Puede encontrarse una exposición extraordinariamente viva de esta historia en [*229*].

Esta medida Γ desempeña el papel de una medida gaussiana en dimensión infinita. Parece que Lévy hubiese esperado un tanto confusamente poder definir de manera intrínseca una medida gaussiana sobre cualquier espacio de Hilbert de dimensión infinita. De hecho, como demostraron Lévy y Wiener, la medida Γ es invariante en un cierto sentido [4] para los automorfismos de l^2, pero, desgraciadamente, el conjunto l^2 de las sucesiones $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ de cuadrado sumable es de medida nula para Γ. Hoy día sabemos que sobre un espacio de Hilbert de dimensión infinita tenemos que contentarnos con una «distribución canónica débil» [5].

El progreso fundamental se debe a Wiener: si bien no tenemos una medida de Gauss razonable sobre un espacio de Hilbert de dimensión infinita, sí resulta posible construir, mediante la operación de «primitivación», una medida w sobre un espacio de funciones continuas a partir de una distribución canónica débil. Vamos a explicar sucintamente la construcción inicial de w por Wiener [*336*], construcción directamente influenciada por la relación $\Gamma = \lim_{m\to\infty} \sigma_{m, \sqrt{m}}$ de Gâteaux y Lévy. Para todo entero $m \geqslant 1$, sea H_m el conjunto formado por las funciones definidas en $T =]0,1]$ que son constantes en cada uno de los intervalos $\left]\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right]$ (para $k = 1, 2, \cdots, m$), sea π_m la medida de masa 1 invariante por las rotaciones sobre la esfera euclídea de radio 1 en $\mathbf{R}^m$. Sea f_m el isomorfismo de H_m sobre $\mathbf{R}^m$ que asocia a toda función que toma el valor a_k en el intervalo $\left]\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right]$ el vector $(a_1, a_2 - a_1, \cdots, a_m - a_{m-1})$ (de aquí el nombre de «espacio diferencial», tan

[4] De un modo más preciso, se tiene el resultado siguiente. Sea U un automorfismo del espacio de Hilbert l^2 y sea (u_{mn}) la matriz de U. Sean E el espacio vectorial de todas las sucesiones reales $(x_n)_{n \geqslant 1}$ y F el subespacio de E formado por las sucesiones $(x_n)_{n \geqslant 1}$ para las cuales las series $\sum_{n \geqslant 1} u_{mn}x_n$ convergen para todo $m \geqslant 1$. La fórmula $(Ux)_m = \sum_{n \geqslant 1} u_{mn}x_n$ define una aplicación lineal $\hat{U}$ de F en E, la medida Γ está concentrada en F, y se tiene $\hat{U}(\Gamma) = \Gamma$.

[5] Esta noción ha sido introducida con el nombre de «weak canonical distributions» por I. Segal [*281*], a quien se debe un estudio detallado de ella y su aplicación a ciertos problemas de la teoría cuántica de campos.

caro a Wiener); sea finalmente w_m la medida definida sobre H_m imagen de π_m por f_m^{-1}. Wiener define entonces la medida buscada w como el límite de las medidas w_m. De un modo preciso, sea H el conjunto de las funciones regladas sobre T con la topología de la convergencia uniforme (se tiene $H_m \subset H$ para todo entero $m \geqslant 1$). Existe entonces para toda función F uniformemente continua y acotada sobre H el límite $A\{F\} = \lim_{m\to\infty} \int_{H_m} F(x)dw_m(x)$. A continuación Wiener obtiene ciertas mayoraciones mediante un análisis sutil del juego de cara y cruz, y, empleando los argumentos de compacidad debidos a Daniell, muestra que el teorema de prolongación de Daniell es aplicable, llegándose así a la existencia de una medida w de soporte $\varepsilon(T)$ y tal que $A\{F\} = \int_{\varepsilon(T)} F(x)dw(x)$. Wiener puede mostrar entonces que la medida w corresponde a las hipótesis de Einstein [6], y sus estimaciones le permiten dar un sentido preciso a la observación de Perrin sobre las funciones sin derivada: el conjunto de las funciones que verifican una condición de Lipschitz de orden $\frac{1}{2}$ es de medida cero para w (por el contrario, para cada $0 < a < \frac{1}{2}$, casi toda función satisface una condición de Lipschitz de orden a).

Hoy día conocemos numerosas construcciones de la medida

[6] Esto se traduce por la fórmula

$$\int_{\varepsilon(T)} f(x(t_1), \cdots, x(t_n))\, dw(x)$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})^{-1/2} \int \cdots \int f(x_1, \cdots, x_n) \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}}\right) dx_1 \cdots dx_n$$

donde f es una función continua acotada arbitraria sobre $\mathbf{R}^n$ y donde se tiene

$$0 = t^0 < t_1 < \cdots < t_n \cdots \leqslant 1$$

(se emplea el convenio $x^0 = 0$). Wiener, que había sido formado en el rigor analítico por Hardy, y no muy seguro (con razón) de los fundamentos del Cálculo de Probabilidades en esa época, tiene muy buen cuidado de no emplear ni la terminología ni los resultados probabilistas. El resultado de todo ello es que sus trabajos están plagados de fórmulas apabullantes, de las que la anterior no es más que una muestra sencilla. Esta particularidad fue sin duda uno de los factores que contribuyó a retrasar la difusión de sus ideas.

de Wiener. Paley y Wiener utilizan las series de Fourier aleatorias ([*243*], cap. IX); para toda sucesión real $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 1}$ y todo entero $m \geq 0$, definimos la función $f_{m,\mathbf{a}}$ sobre $]0,1]$ mediante

$$f_{m,\mathbf{a}}(t) = a_1(t) + 2 \sum_{k=2}^{2^{m+1}} \frac{1}{\pi k} a_{k-1} \operatorname{sen} \pi k t.$$

Puede demostrarse que para casi toda sucesión (con respecto a Γ) $\mathbf{a}$, la sucesión de funciones $f_{m,\mathbf{a}}$ tiende hacia una función continua $f_{\mathbf{a}}$, y que w es la imagen de Γ por la aplicación (definida salvo un conjunto de medida nula) $\mathbf{a} \to f_{\mathbf{a}}$. Lévy daría después otra construcción en [*201* b y c]. Finalmente, Kac, Donsker, y Erdös muestran hacia 1950 la manera de sustituir en la construcción inicial de Wiener las medidas esféricas π_m sobre $\mathbf{R}^m$ por medidas más generales. Sus resultados, que establecen relaciones importantes entre la medida de Wiener y los teoremas de límite del Cálculo de Probabilidades, serán completados y sistematizados por Prokhorov [*254*] en un trabajo sobre el que volveremos más adelante.

No es éste el lugar adecuado para analizar los numerosos e importantes trabajos probabilistas a que dio ocasión el descubrimiento de Wiener; hoy día el movimiento browniano no es más que uno de los ejemplos más importantes de proceso markoviano. Mencionaremos solamente la aplicación por Kac de la medida de Wiener a la resolución de ciertas ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico; se trataría en este caso de una adaptación de las ideas de Feynman en teoría cuántica de campos, lo que nos proporciona un ejemplo más de la influencia recíproca entre las matemáticas y los problemas físicos.

Límites proyectivos de medidas

Se trata aquí de una teoría que ha sido desarrollada fundamentalmente en función de las necesidades del Cálculo de Probabilidades. Los problemas referentes a una sucesión finita $x_1, \cdots, x_n$ de variables aleatorias se resuelven en principio cuando se conoce la ley P_X de esta sucesión: se trata de una medida positiva de masa 1 sobre $\mathbf{R}^n$ tal que la probabilidad de obtener simultáneamente las desigualdades $a_1 \leqslant X_1 \leqslant b_1, \cdots, a_n \leqslant X_n \leqslant b_n$ sea igual a $P_X(C)$, siendo C el rectángulo cerrado $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ de $\mathbf{R}^n$. En los casos que aparecen en la práctica la medida P_X tiene un soporte discreto, o bien admite una densidad con respecto a la medida de Lebesgue. Cuando nos ocupamos de una sucesión infinita de variables aleatorias $(X_n)_{n \geq 1}$, la ley P_n de la sucesión parcial $(X_1, \cdots, X_n)$ es en general conocida para todo entero $n \geqslant 1$, satisfaciéndose además una condición de compatibilidad que indica que la sucesión $(P_n)_{n \geq 1}$ es un sistema proyectivo de medidas. Hasta aproximadamente 1920 se acostumbraba a definir de manera más o menos implícita las probabilidades de los acontecimientos correspondientes a la sucesión infinita mediante pasos al límite «naturales» a partir de las probabilidades conocidas del caso finito; se admitirá, por ejemplo, que la probabilidad de que un juego se termine es el límite, cuando n tiende a infinito, de que el juego se termine en, como máximo, n partidas. Evidentemente, una teoría de este tipo no es excesivamente coherente, y no hay nada que nos asegure que no puedan presentarse «paradojas» si una misma probabilidad es estimada de dos maneras diferentes siguiendo procedimientos igualmente «naturales».

Parece que Steinhaus [*293*] fue el primero en haber sentido la necesidad de considerar (para el juego de cara y cruz), no solamente el sistema proyectivo $(P_n)_{n \geq 1}$, sino también su límite. Daniell [*76* d] había demostrado un poco antes, en 1919, la existencia de tales límites proyectivos [7], pero este resultado no parece que llegase a ser conocido en Europa, y vuelve a ser encontrado por Kolmogoroff en 1933 en la obra [*183*] en la que este autor formula la axiomática del Cálculo de Probabilidades. En las demostraciones de Daniell y Kolmogoroff interviene un argumento de compacidad que se basa en el teorema de Dini.

El teorema de Daniell-Kolmogoroff era ampliamente suficiente para el caso de las sucesiones aleatorias $(X_n)_{n \geq 1}$, pero en el estudio de las funciones aleatorias, emprendido a partir de 1935 por Kol-

[7] Daniell considera el caso de medidas sobre un producto $\prod_{n \geq 1} I_n$ de intervalos compactos de $\mathbf{R}$, pero su método se extiende inmediatamente a un producto cualquiera de espacios compactos.

mogoroff, Feller y Doob, surgirían dificultades mucho más considerables. Consideremos por ejemplo un intervalo T de **R**, que representará el conjunto de instantes de observación de un «proceso estocástico»; el conjunto de todas las trayectorias posibles es el espacio producto $\mathbf{R}^T$, considerado como límite proyectivo de los productos $\mathbf{R}^H$, donde H recorre el conjunto de las partes finitas de T, teniéndose en general un sistema proyectivo de medidas (μ_H). El teorema de Kolmogoroff nos proporciona una medida sobre $\mathbf{R}^T$, pero dicha medida está definida sobre una tribu que es considerablemente más pequeña que la tribu boreliana [8]. Una variante de la construcción de Kolmorogoff, que permite la construcción de una medida sobre un espacio topológico, fue encontrada primeramente por Kakutani [*177*], y redescubierta varias veces posteriormente. Para ello se considera μ_H como una medida sobre $\bar{\mathbf{R}}^H$, soportada por $\bar{\mathbf{R}}^H$ [9], el espacio compacto $E = \bar{\mathbf{R}}^T$ es el límite proyectivo de los productos finitos $\bar{\mathbf{R}}^H$, y podemos definir sobre E una medida μ que sería el límite proyectivo de las μ_H. Pero este procedimiento presenta un inconveniente grave: los elementos de $\bar{\mathbf{R}}^T$ no poseen ninguna propiedad de regularidad que permita avanzar en el estudio probabilístico del proceso, y ni siquiera es posible eliminar los valores parásitos $\pm\infty$ introducidos por la compactificación $\bar{\mathbf{R}}$ de **R**. Para superar esta dificultad puede intentarse considerar la medida μ de $\bar{\mathbf{R}}^T$ sobre un subespacio determinado (por ejemplo ε(T) en el caso del movmiento browniano); la dificultad fundamental proviene del hecho de que un espacio funcional, incluso de un tipo usual, no es necesariamente μ — medible en $\bar{\mathbf{R}}^T$, e incluso la elección misma de este espacio funcional podría llegar a ser un problema [10].

[8] La medida de Kolmogoroff está definida únicamente para los conjuntos borelianos de $\mathbf{R}^T$ de la forma $A \times \mathbf{R}^{T-D}$, donde D es una parte numerable de T y A una parte boreliana de $\mathbf{R}^D$, lo que hace que el teorema de Kolmogoroff para un producto cualquiera $\mathbf{R}^T$ sea una consecuencia inmediata del caso de los productos numerables.

[9] Podría sustituirse $\bar{\mathbf{R}}$ por cualquier espacio compacto que contuviera **R** como subespacio denso.

[10] Para una discusión detallada del problema de la construcción de medidas sobre los espacios funcionales y los métodos empleados antes de Prokhorov, véase J. L. Doob [*93*].

Un progreso decisivo en este sentido ha sido el llevado a cabo por Prokhorov en 1956 en un trabajo [*254*] que ha ejercido una influencia determinante en la teoría de los procesos estocásticos. Prokhorov, mediante una axiomatización conveniente de los métodos utilizados por Wiener en el artículo que hemos analizado anteriormente, consigue establecer un teorema general de existencia de límites proyectivos de medidas en los espacios funcionales.

Una clase más restringida de sistemas proyectivos fue introducida por Bochner [*24* b] en 1947; se trata de los sistemas proyectivos formados por espacios vectoriales reales de dimensión finita y aplicaciones lineales suprayectivas. El límite proyectivo de un sistema de este tipo se identifica de manera natural con el dual algebraico E * de un espacio vectorial real E dotado de la topología σ(E *, E), y el sistema proyectivo correspondiente de medidas posee un límite que es una medida μ definida sobre una tribu mucho más pequeña que la tribu boreliana de E *. Bochner consiguió caracterizar perfectamente estas «distribuciones canónicas débiles» mediante su transformada de Fourier, que es una función sobre E, pero este resultado no resulta demasiado manejable si E no está dotado de una topología, en cuyo caso es necesario examinar la posibilidad de considerar μ como una medida sobre el dual topológico E′ de E. Por otro lado, y de manera independiente, R. Fortet y E. Mourier, al intentar generalizar a las variables aleatorias con valores en un espacio de Banach algunos resultados clásicos del Cálculo de Probabilidades (ley de los grandes números, teorema central del límite) pusieron igualmente en evidencia el papel fundamental desempeñado por la transformación de Fourier en estas cuestiones. Pero no se realizó ningún progreso decisivo hasta 1956, cuando Gelfand sugirió la idea [*125* c] de que el marco más natural para la transformación de Fourier no es el de los espacios de Hilbert (ni los de Banach) sino el de los espacios de Fréchet nucleares. Gelfand conjeturó que toda función continua de tipo positivo sobre un espacio de esta clase es la transformada de Fourier de una medida sobre su dual, resultado que fue demostrado muy poco después por Minlos [*222*]. La importancia de este resultado radica sobre todo en el hecho de que es aplicable a los espacios de distribuciones y de que la casi totalidad de los espacios funcionales son partes borelianas del espacio de distribuciones (que resulta por tanto un huésped bastante

mejor que $\mathbf{R}^T$)[11]. La teoría de las distribuciones aleatorias constituye un dominio en plena expansión, y nos contentaremos con remitir al lector a la obra de Gelfand y Vilenkin [*126*].

Todos los resultados sobre los límites proyectivos que acabamos de mencionar utilizan la existencia de una topología sobre los espacios de base, y podríamos preguntarnos si existe una teoría análoga en el caso de las medidas «abstractas». Von Neumann demostró en 1935 la existencia en todos los casos de medidas producto, pero el descubrimiento de un contraejemplo por Jessen y Andersen [*290*] ha hecho desaparecer la esperanza de que todo sistema proyectivo de medidas admita un límite. Sin embargo, se han encontrado dos remedios parciales a esta situación: el primero es el establecimiento por C. Ionescu-Tulcea, en 1949, de límites proyectivos numerables, siempre que existan desintegraciones convenientes[12], resultado muy interesante para el estudio de los procesos de Markov. Además, en segundo lugar, se puso en evidencia el hecho de que la topología de los espacios intervenía solamente a través del conjunto de las partes compactas; resultaba pues natural intentar axiomatizar esta situación dentro de la teoría abstracta por medio de la noción de clase compacta de partes de un conjunto, labor que fue llevada a cabo en 1953 por Marczewski (estableciendo de este modo un teorema abstracto de límites proyectivos) y por Ryll-Nardzewski (que se ocupó de la desintegración de medidas)[13].

Medidas sobre los espacios topológicos generales y convergencia estricta

El estudio de las relaciones entre la teoría de la medida y la topología ha sido concebido fundamentalmente como una consideración de las propiedades de regularidad de las medidas, y en par-

[11] Puede consultarse la exposición sistemática de X. Fernique [*110*], que contiene también numerosos resultados sobre la convergencia estricta.

[12] Parece que la ausencia de una teoría satisfactoria de las desintegraciones ha contribuido a poner ciertas limitaciones a la teoría de las medidas «abstractas». Esta dificultad aparece de modo insistente en el Cálculo de Probabilidades a propósito de las probabilidades condicionales.

[13] Puede consultarse [*249*] para una exposición de esta teoría.

ticular de la regularidad «exterior» y de la regularidad «interior»[14], siendo la regularidad interior equivalente a la regularidad exterior sobre un espacio localmente compacto numerable en el infinito. La construcción de Lebesgue para la medida de los conjuntos de la recta pone de manifiesto estas dos clases de regularidad, y la propiedad de regularidad exterior de las medidas sobre un espacio polaco parece haber sido un hecho públicamente notorio hacia 1935. Pero el papel desempeñado por la regularidad interior no es señalado hasta 1940, en un artículo de A. D. Alexandrov [*3*], cuya difusión fue retrasada por la guerra, y en el que muestra que las medidas sobre un espacio polaco poseen dicha regularidad, resultado que Prokhorov vuelve a encontrar después [*254*], y que le es atribuido erróneamente. El hecho de que dicha propiedad se extendía a los espacios suslinianos no ha sido señalado hasta hace muy poco tiempo. Esta observación ha hecho aumentar considerablemente la importancia de dichos espacios, a lo que ha contribuido igualmente el haberse advertido que su teoría podía desarrollarse sin necesidad de hipótesis de metrizabilidad, y que la casi totalidad de los espacios funcionales eran suslinianos (e incluso muy frecuentemente lusinianos)[15].

La manera más cómoda de definir una convergencia (vaga o estricta) para las medidas consiste en poner en dualidad el espacio de medidas con un espacio de funciones continuas. A. A. Markov estableció en 1938, generalizando un resultado antiguo de F. Riesz, una correspondencia biunívoca entre los funcionales positivos sobre $\varepsilon(X)$ y las medidas regulares sobre un espacio compacto X.

[14] Se dice que una medida «abstracta» μ sobre la tribu boreliana de un espacio topológico separado es regular exteriormente si la medida de todo conjunto boreliano es el extremo inferior de las medidas de los conjuntos abiertos que lo contienen, y se dice que μ es regular interiormente si la medida de todo conjunto boreliano es el extremo superior de las medidas de sus partes compactas.

[15] Varios autores han introducido clases restringidas de medidas «abstractas» (espacios «perfectos» de Kolmogoroff-Gnedenko, espacios «lusinianos» de Blackwell, espacios «de Lebesgue» de Rokhlin) para intentar superar ciertas dificultades probabilistas (principalmente las relaciones entre las distintas nociones de independencia o de dependencia estocásticas). De hecho, al menos si se emplea una hipótesis de numerabilidad bastante débil, todas estas definiciones proporcionan caracterizaciones de medidas «abstractas» isomorfas a una medida positiva acotada sobre un espacio susliniano. Sobre esto puede consultarse [*249*].

En el trabajo [3] ya citado, A. D. Alexandroff extiende estos resultados al caso de un espacio completamente regular, introduce una jerarquía en el espacio de formas lineales positivas sobre el espacio $\varepsilon^b(X)$ de las funciones continuas acotadas sobre un espacio completamente regular X [16], define la convergencia estricta para las medidas acotadas, y demuestra entre otros los siguientes teoremas:

a) Si X es un espacio polaco, el conjunto de formas lineales sobre $\varepsilon^b(X)$ que corresponden a las medidas es cerrado para la convergencia débil de sucesiones.

b) Si una sucesión de medidas acotadas tiene un límite estricto, «no hay ninguna masa que se vaya al infinito» (se trata de una forma débil del recíproco del teorema de convergencia estricta de Prokhorov).

Sumergido en esta selva de notaciones y teoremas, Prokhorov realizará la hazaña de encontrar los resultados importantes para la teoría de procesos estocásticos y de dar de ellos una presentación sencilla y poderosa. Una parte importante de su gran trabajo de 1956 que ya hemos citado [*254*] está dedicada a las medidas acotadas sobre un espacio polaco. Generalizando una construcción de Lévy, Prokhorov define sobre el conjunto de medidas positivas de masa 1 una distancia que le convierte en un espacio polaco, y establece después un criterio importante de compacidad para la convergencia estricta. Independientemente de Prokhorov, Le Cam [*197*] ha obtenido igualmente una serie de resultados de compacidad para la convergencia estricta de medidas, sin hacer ninguna hipótesis de metrizabilidad sobre los espacios considerados, y en el caso particular de un espacio localmente compacto sus resultados coinciden con los teoremas anteriores de Dieudonné.

[16] Alexandrov distingue, por orden de generalidad decreciente, las σ-medidas (medidas «abstractas» sobre la tribu boreliana de X), las τ-medidas (medidas exteriormente regulares) y las medidas tensas (medidas interiormente regulares). Estas tres nociones coinciden en el caso de que X sea polaco. La terminología se debe a Mac Shane y Le Cam [*197*]. Una exposición sistemática de los trabajos suscitados por esta clasificación puede encontrarse en [*316*].

GRUPOS DE LIE Y ALGEBRAS DE LIE

I. Génesis

La teoría que recibe desde hace casi un siglo el nombre de «teoría de los grupos de Lie» ha sido construida fundamentalmente por un matemático: Sophus Lie.

Antes de abordar directamente su historia comenzaremos por resumir brevemente distintas investigaciones anteriores que contribuyeron de algún modo a preparar su desarrollo.

a) *Grupos de transformaciones* (Klein-Lie, 1869-1872)

La teoría de los grupos de permutaciones de un conjunto *finito* comienza a desarrollarse y a ser utilizada hacia 1860 (Serret, Kronecker, Mathieu, Jordan). Por otra parte, la teoría de los invariantes, entonces en pleno desarrollo, contribuye a familiarizar a los matemáticos con ciertos conjuntos infinitos de transformaciones geométricas estables para la composición (sobre todo las transformaciones lineales y las proyectivas). Pero no parece que antes del trabajo de Jordan [*174* b] de 1868 sobre los «grupos de movimientos» (subgrupos cerrados del grupo de desplazamientos del espacio

euclídeo de dimensión 3) se hubiese establecido ninguna relación consciente entre estas dos corrientes de ideas.

En 1869 el joven Félix Klein (1849-1925), alumno de Plücker, hace amistad en Berlín con el noruego Sophus Lie (1842-1899), algunos años mayor que él, con el que tiene en común un interés por la «geometría de rectas» de Plücker, y, sobre todo, por la teoría de los complejos de rectas (p. 183). En este período tiene Lie una de sus ideas más originales, la introducción de la noción de invariante en Análisis y en geometría diferencial, una de cuyas fuentes es su propia observación de que todos los métodos clásicos de integración por «cuadraturas» de las ecuaciones diferenciales se apoyan en el hecho de que la ecuación es invariante por una familia «continua» de transformaciones. El primer trabajo en que Lie desarrolla esta idea (redactado por Klein) data de 1869, en él estudia el «complejo de Reye» (conjunto de rectas que cortan las caras de un tetraedro en cuatro puntos cuya razón doble está dada de antemano) y las curvas y superficies que admiten como tangentes las rectas de este complejo ([*202*], vol. 1, Abh. V, pp. 68-77). Su método se basa en la invariancia del complejo de Reye por el grupo conmutativo con 3 parámetros (otro maximal de **PGL(4,C)**) que deja invariantes los vértices del tetraedro. En el trabajo que Klein y Lie escriben en París durante la primavera de 1870 ([*182*], t. I, pp. 416-420) la idea fundamental es la misma; en dicho trabajo se determinan esencialmente los subgrupos conexos conmutativos del grupo proyectivo del plano **PGL(3, C)**, y se estudian las propiedades geométricas de sus órbitas (con el nombre de curvas o superficies V), lo que les proporciona, mediante un procedimiento uniforme, las propiedades de una serie de curvas, algebraicas o trascendentes, bastante variadas, tales como $y = cx^m$ o las espirales logarítmicas. Los testimonios de ambos coinciden en señalar la profunda impresión que ejercieron sobre ellos las teorías de Galois y Jordan (el comentario de Jordan sobre Galois había aparecido en los *Math. Annalen* de 1869; además, Lie ya había oído hablar de la teoría de Galois en 1863). Klein empieza a interesarse en 1871 por las geometrías no euclídeas, viendo en ello el comienzo de su búsqueda de un principio de clasificación de todas las geometrías conocidas, lo que le conduciría al «programa de Erlangen» de 1872. Lie, por su parte, da la fecha de su estancia en París para el origen de sus

ideas sobre los grupos de transformaciones en una carta de 1873 a A. Mayer ([*202*], vol. 5, p. 584), y utiliza ya el término «grupo de transformaciones» en un trabajo de 1871 ([*202*], vol. 1, Abh. XII, pp. 153-214), planteando explícitamente el problema de la determinación de todos los subgrupos ("*continuos o discontinuos*") de **GL**(n, **C**). Parece que, en realidad, Klein y Lie debieron de experimentar ciertas dificultades para insertarse en este nuevo universo matemático, y Klein habla del «Tratado» de Jordan, que acababa de aparecer, como de un libro *sellado con siete sellos* ([*182*], t. I, p. 51), escribiendo además a propósito de ([*182*], t. I, pp. 424-459): *A Lie se debe todo lo que se relaciona con la idea heurística de un grupo continuo de operadores, y en particular todo lo que se refiere a la integración de las ecuaciones diferenciales o en derivadas parciales. La idea de todas las nociones que desarrollaría más tarde en su teoría de los grupos continuos estaba ya entonces en su mente, pero de un modo tan poco elaborado que yo mismo hube de convencerle de numerosos detalles, por ejemplo, al principio, de la existencia misma de las curvas V, a lo largo de conversaciones prolongadas* ([*182*], t. I, p. 415).

b) *Transformaciones infinitesimales*

La concepción de una transformación «infinitamente pequeña» se remonta como mínimo a los comienzos del cálculo infinitesimal; sabemos que Descartes descubre el centro instantáneo de rotación admitiendo que «en el infinitamente pequeño» todo movimiento plano puede ser asimilado a una rotación, y toda la elaboración de la Mecánica Analítica durante el siglo XVIII se basa en ideas semejantes. Sylvester, al intentar formar (en 1851) los invariantes del grupo lineal **GL(3, C)**, o de algunos de sus subgrupos, da incrementos «infinitamente pequeños» de la forma $\alpha_j dt$ a los parámetros z_j que figuran en estas matrices, y expresa la invariancia de la función $f((z_j))$ mediante la ecuación $f((z_j + \alpha_j dt)) = f((z_j))$, lo que le proporciona para f la ecuación lineal en derivadas parciales $Xf = 0$, siendo

(1) $$Xf = \sum_j \alpha_j \frac{\partial f}{\partial z_j}.$$

X es pues un *operador diferencial*, la «derivada en la dirección de los parámetros directores α_j» ([*304*], vol. 3, pp. 326 y 327). Sylvester parece consciente de que detrás de todo lo anterior hay un principio general de gran importancia, pero no parece que volviese a considerar la cuestión. Un poco después, Cayley ([*58*], t. II, pp. 164-178) hace lo mismo para los invariantes de **SL**(2, **C**) en algunas representaciones de este grupo y muestra que se trata de las soluciones de dos ecuaciones en derivadas parciales de primer orden $Xf = 0$, $Yf = 0$, en las que X e Y son obtenidas como antes a partir de transformaciones «infinitamente pequeñas»

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ dt & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & dt \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En términos modernos diríamos que lo anterior se explica por el hecho de que X e Y engendran el álgebra de Lie sJ(2, **C**). Además, Cayley calcula explícitamente el corchete XY — YX, y muestra que procede también de una transformación «infinitamente pequeña».

Jordan hace uso del concepto de «transformación infinitamente pequeña» a lo largo de toda su memoria de 1868 sobre los grupos de movimientos [*174* b], pero solamente desde un punto de vista geométrico. A él se debe sin duda la idea de un grupo uniparamétrico «engendrado» por una transformación infinitamente pequeña: para Jordan se trataría del conjunto de transformaciones obtenido *«reiterando convenientemente»* la transformación infinitamente pequeña (l. c., p. 243). Klein y Lie utilizan la misma expresión *«transformación infinitamente pequeña repetida»* en su memoria de 1871 ([*182*], t. I, pp. 424-459), pero el contexto nos indica que en este caso se habla de la integración de un sistema diferencial. Si el grupo uniparamétrico considerado está formado por las transformaciones $x' = f(x, y, t)$, $y' = g(x, y, t)$, la «transformación infinitamente pequeña» correspondiente viene dada por

$$dx = p(x, y)dt \qquad dy = q(x, y)dt$$

donde $p(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(x, y, t_0)$, $q(x, y) = \dfrac{\partial g}{\partial t}(x, y, t_0)$, y t_0 corresponde a la transformación idéntica del grupo. Como Klein y Lie conocen explícitamente las funciones f y g, no les cuesta trabajo comprobar que las funciones

$$t \longrightarrow f(x, y, t) \qquad t \longrightarrow g(x, y, t)$$

proporcionan en forma paramétrica la curva integral de la ecuación diferencial

$$q(\xi, \eta)\, d\xi = p(\xi, \eta)\, d\eta$$

que pasa por el punto (x, y), pero no dan ninguna justificación general de ello, ni vuelven a hacer uso de este hecho en el resto de su memoria.

c) *Transformaciones de contacto*

Durante los dos años siguientes, Lie parece haber abandonado los grupos de transformaciones (aunque mantiene un contacto permanente con Klein, que publica en 1872 su «Programa») a fin de estudiar las transformaciones de contacto, la integración de las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, y las relaciones entre ambas. No vamos a hacer aquí la historia de estas cuestiones; limitándonos a mencionar algunos puntos que parecen haber desempeñado un papel importante en la génesis de los grupos de transformaciones.

La noción de transformación de contacto generaliza simultáneamente las transformaciones puntuales y las transformaciones «por polares recíprocas». *Grosso modo*, puede decirse que una transformación de contacto [1] en $\mathbf{C}^n$ es un isomorfismo de un abierto Ω

[1] Se trata en este caso de transformaciones de contacto «homogéneas». Anteriormente, la consideración de ecuaciones del tipo (2), pero en las que F depende de z, había inducido a Lie a considerar transformaciones de contacto en $2n + 1$ variables $z, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n$; en este caso el problema consistiría en encontrar $2n + 2$ funciones Z, P_i, X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ y ϱ (esta última $\neq 0$ en todo punto) tales que $dZ - \sum_i P_i dX_i = \varrho\,(dz - \sum_i p_i dx_i)$. Este caso, más general en apariencia, se reduce fácilmente al caso «homogéneo» ([*203*], t. 2, pp. 135-146).

de la variedad $T'(C^n)$ de los vectores cotangentes a C^n sobre otro abierto Ω' de $T'(C^n)$ que transforma la 1-forma canónica de Ω en la de Ω'. Dicho de otra manera, si designamos por $(x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)$ las coordenadas canónicas de $T'(C^n)$, una transformación de contacto es un isomorfismo $(x_i, p_i) \to (X_i, P_i)$ que verifica la relación $\sum_{i=1}^{n} P_i dX_i = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$. Estas transformaciones aparecen en el estudio de la integración de las ecuaciones en derivadas parciales de la forma

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0. \tag{2}$$

A lo largo de sus trabajos sobre estas cuestiones, Lie se familiariza con el manejo de los paréntesis de Poisson

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) \tag{3}$$

y de los corchetes [2] $[X, Y] = XY - YX$ de operadores diferenciales del tipo (1), interpreta los paréntesis de Poisson (3) como el resultado de hacer actuar sobre f una transformación de tipo (1) asociada a g, y hace con tal motivo la observación de que la identidad de Jacobi para los paréntesis de Poisson significa que el corchete de los operadores diferenciales correspondientes a g y h está asociado al paréntesis (g, h). El problema de encontrar funciones g tales que $(F, g) = 0$, que aparece en el método de Jacobi para la integración de la ecuación en derivadas parciales (2) se convierte para Lie en el de encontrar una transformación de contacto infinitesimal que deje invariante la ecuación considerada. Por último, Lie se ve llevado por sus trabajos a estudiar los conjuntos de funciones

[2] Estos corchetes aparecían ya en la teoría de Jacobi-Clebsch de los «sistemas completos» de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden $X_j f = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$, noción equivalente a la de «sistema completamente integrable» de Frobenius: el teorema fundamental (equivalente al «teorema de Frobenius») que caracteriza estos sistemas es el que dice que los corchetes $[X_i, X_j]$ deben ser combinaciones lineales (con coeficientes variables) de los X_k.

$(u_j)_{1 \leq j \leq m}$ de las variables x_i y p_i tales que los paréntesis (u_j, u_k) sean funciones de u_h, y da a estos conjuntos (que ya habían sido considerados en sustancia por Jacobi) el nombre de «grupos».

II. Grupos continuos y transformaciones infinitesimales

En el otoño de 1873 Lie reanuda bruscamente el estudio de los grupos de transformaciones, obteniendo resultados fundamentales. En tanto que nos resulta posible seguir la evolución de su pensamiento a través de algunas cartas a A. Mayer, de los años 1873-74 ([*202*], vol. 5, pp. 584-608), Lie parte de un «grupo continuo» de transformaciones en n variables

$$x'_i = f_i(x_1 \cdots, x_n, a_1, \cdots, a_r) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{4}$$

que depende efectivamente [3] de r parámetros $a_1, \cdots, a_r$, y advierte que si la transformación [4] coincide con la identidad para los valores $a_1^0, \cdots, a_r^0$ de los parámetros (4), entonces los desarrollos de Taylor de las x_i (limitados al primer término)

$$\begin{aligned} &f_i(x_1, \cdots, x_n, a_1^0 + z_1, \cdots, a_r^0 + z_r) = \\ &x_1 + \sum_{k=1}^{r} z_k X_{ki}(x_1, \cdots, x_n) + \cdots \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \end{aligned} \tag{5}$$

[3] Lie quiere decir con esto que las f_i no pueden expresarse con ayuda de menos de r funciones de las a_j, o, dicho de otro modo, que la matriz jacobiana $(\partial f_i / \partial a_j)$ es «en general» de rango r.

[4] En sus primeras notas, Lie piensa que es posible demostrar *a priori* la existencia de elemento neutro y de inverso en todo conjunto de transformaciones (4) estable para la composición. Después se da cuenta de que su demostración es incorrecta, y Engel le proporciona un contraejemplo reproducido en ([*203*], t. 1, § 44). Lie muestra sin embargo el modo de reducir los sistemas «continuos» (4) estables por la composición a los grupúsculos de transformaciones: un sistema de esta clase es de la forma $G \circ h$, donde G es un grupúsculo de transformaciones y h una transformación del sistema ([*203*], t. 1, teor. 26, p. 163, y t. 3, teor. 46, p. 572).

nos proporcionan una transformación infinitamente pequeña «genérica» que depende linealmente de los r parámetros z_j

$$(6)\qquad dx_i = \left(\sum_{k=1}^{r} z_k \mathrm{X}_{ki}(x_1, \cdots, x_n)\right) dt \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

Como en su memoria con Klein, Lie integra el sistema diferencial

$$(7)\qquad \frac{d\xi_1}{\sum_k z_k \mathrm{X}_{k1}(\xi_1, \cdots, \xi_n)} = \cdots = \frac{d\xi_n}{\sum_k z_k \mathrm{X}_{kn}(\xi_1, \cdots, \xi_n)} = dt$$

obteniendo, para cada punto $(z_1, \cdots, z_r)$ un grupo uniparamétrico

$$(8)\qquad t \to x'_i = g_i(x_1, \cdots, x_n, z_1, \cdots, z_r, t) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

tal que se tiene $g_i(x_1, \cdots, x_n, z_1, \cdots, z_r, 0) = x_i$ para todo i, y demuestra asimismo, de modo ingenioso, haciendo uso del hecho de que las transformaciones (4) forman un conjunto estable para la composición, que el grupo uniparamétrico (8) es un subgrupo del grupo dado ([*202*], vol. 5, Abh. VII, pp. 32-63). Pero la idea nueva, fundamental para toda la teoría, es la de considerar los términos de *segundo orden* de los desarrollos de Taylor de las funciones (4). Su razonamiento, presentado por él mismo de modo un tanto confuso y heurístico ([*202*], vol. 5, Abh. VII, pp. 32-63 y [*202*], vol. 5, pp. 600-601), puede exponerse de la manera siguiente. Si las z_j son bastante pequeñas, resulta posible hacer $t = 1$ en (8), obteniéndose de este modo nuevos parámetros $z_1, \cdots, z_r$ para las transformaciones del grupo (de hecho se trata de la primera aparición de los «parámetros canónicos»). Teniendo en cuenta (7), se tiene por definición

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} = \sum_k z_k \mathrm{X}_{ki}(x'_1, \cdots, x'_n),$$

y de aquí se obtiene

$$\frac{\delta^2 g_i}{\partial t^2} = \sum_{k,j} z_k \frac{\partial \mathrm{X}_{ki}}{\partial x_j}(x'_1, \cdots, x'_n)\frac{\partial x'_j}{\partial t}$$
$$= \sum_{k,j} z_k \frac{\partial \mathrm{X}_{ki}}{\partial x_j}(x'_1, \cdots, x'_n)\left(\sum_h z_h \mathrm{X}_{hj}(x'_1, \cdots, x'_n)\right)$$

los que nos da

$$x'_i = x_i + \left(\sum_k z_k \mathrm{X}_{ki}(x_1, \cdots, x_n)\right)t$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\sum_{k,h,j} z_k z_h \frac{\partial \mathrm{X}_{ki}}{\partial x_j}(x_1, \cdots, x_n)\,\mathrm{X}_{hj}(x_1, \cdots, x_n)\right)t^2 + \cdots$$

Entonces, para $t = 1$, se tienen los desarrollos de Taylor con respecto a los parámetros z_j

$$(9)\qquad x'_i = x_i + \left(\sum_k z_k \mathrm{X}_{ki}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\sum_{k,h,j} z_k z_h \mathrm{X}_{hj}\frac{\partial \mathrm{X}_{ki}}{\partial x_j}\right) + \cdots (1 \leqslant i \leqslant n)$$

Estas relaciones pueden escribirse abreviadamente como $x' = \mathrm{G}(x, z)$, donde x, x', y z son los vectores

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \quad x' = (x'_1, \cdots, x'_n) \quad z = (z_1, \cdots, z_r).$$

La propiedad fundamental de estabilidad del conjunto de estas transformaciones para la composición se escribe como

$$(10)\qquad \mathrm{G}(\mathrm{G}(x, u), v) = \mathrm{G}(x, \mathrm{H}(u, v))$$

donde $\mathrm{H} = (\mathrm{H}_1, \cdots, \mathrm{H}_r)$ no depende de x. Es inmediato ver que $\mathrm{H}(u, 0) = u$ y $\mathrm{H}(0, v) = v$, obteniéndose los desarrollos

$$(11)\qquad \mathrm{H}_i(u, v) = u_i + v_i + \tfrac{1}{2}\sum_{h,k} c_{ikh} u_h v_k + \cdots,$$

en los que los términos que no están escritos son no lineales en u o en v. Transformando (10) con ayuda de (9) y (11), y comparando los términos en $u_h v_k$ de los dos miembros, Lie obtiene las relaciones

$$(12)\qquad \sum_{j=1}^{n}\left(\mathrm{X}_{hj}\frac{\partial \mathrm{X}_{ki}}{\partial x_j} - \mathrm{X}_{kj}\frac{\partial \mathrm{X}_{hi}}{\partial x_j}\right) = \sum_{l=1}^{r} c_{lhk}\mathrm{X}_{li}$$
$$(1 \leqslant h, k \leqslant r,\ 1 \leqslant i \leqslant n)$$

Su familiaridad con las ecuaciones en derivadas parciales le lleva a escribir estas condiciones en una forma más sencilla: de acuerdo con el modelo de (1), asociada a cada una de las r transformaciones infinitamente pequeñas obtenidas haciendo $z_k = 1$, $z_h = 0$ si $h \neq k$ en (6), el operador diferencial

$$(13) \qquad A_k(f) = \sum_{i=1}^{n} X_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

y vuelve a escribir las condiciones (12) en la forma

$$(14) \qquad [A_h, A_k] = \sum_l c_{lhk} A_l,$$

piedra angular de su teoría. Hasta entonces Lie había empleado indistintamente los términos «transformación infinitamente pequeña» y «transformación infinitesimal» (e. g. [*202*], vol. 5, Abh. I, pp. 1-4); la sencillez de las relaciones (14) le lleva a dar ahora al operador (13) el nombre de «símbolo» de la transformación infinitesimal $dx_i = X_{ki}dt$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ ([*202*], vol. 5, Abh. III, pp. 42-75) y, muy poco después, dará ya al mismo operador (13) el nombre de *transformación infinitesimal* ([*202*], vol. 5, Abh. III, pp. 42-75 y [*202*], vol. 5, p. 589).

Entonces se da cuenta de las estrechas relaciones existentes entre la teoría de los grupos continuos y sus trabajos anteriores sobre las transformaciones de contacto y las ecuaciones en derivadas parciales, lo que le llena de entusiasmo: *Mis antiguos trabajos eran justamente lo que hacía falta para construir la nueva teoría de los grupos de transformaciones*, escribe a Mayer en 1874 ([*202*], vol. 5, p. 586).

Durante los años que siguen, Lie continúa el estudio de los grupos de transformaciones, obteniendo, además de los teoremas generales que resumimos un poco más adelante (§ III), un cierto número de resultados de un tipo mucho más particular: determinación de los grupos de transformaciones de la recta y del plano, de los subgrupos de codimensión pequeña de los grupos proyectivos, de los grupos con menos de 6 parámetros, etc. Pero esto no quiere decir que olvide las ecuaciones diferenciales; incluso podría decirse que, para

él, la teoría de los grupos de transformaciones sería más bien un instrumento para la integración de las ecuaciones diferenciales, desempeñando un papel análogo al del grupo de Galois de una ecuación algebraica [5]. Señalemos que estos trabajos le llevan asimismo a la introducción de ciertos conjuntos de transformaciones con una infinidad de parámetros, a los que da el nombre de «grupos infinitos y continuos» [6], reservando el de «grupos finitos y continuos» para los grupos de transformaciones con un número finito de parámetros del tipo (4) arriba citado.

III. El «diccionario» grupos de Lie-álgebras de Lie

La teoría de los grupos «finitos y continuos», desarrollada por Lie en numerosas memorias a partir de 1874, es expuesta de modo sistemático en el impresionante tratado *Theorie der Transformationsgruppen* ([*203*], 1888-1893), escrito en colaboración con F. Engel [7], ocupando el primer volumen y los cinco últimos capítulos del tercero, mientras que el segundo está dedicado a las transformaciones de contacto.

De acuerdo con el título, en esta obra se habla únicamente de

[5] Estos trabajos tuvieron una influencia muy escasa sobre la teoría general de las ecuaciones diferenciales, habida cuenta de que el grupo de automorfismos de una de estas ecuaciones es en general trivial. Por el contrario, algunos resultados interesantes han sido obtenidos posteriormente para ciertos tipos de ecuaciones (por ejemplo las lineales) por Picard, Vessiot y, más recientemente, por Ritt y Kolchin.

[6] Llamados hoy día «pseudogrupos de Lie», que no debe confundirse con los grupos de Lie sobre espacios de Banach.

[7] Lie ocupó desde 1886 a 1898 la cátedra dejada vacante por Klein en Leipzig, y tuvo a Engel como ayudante, circunstancia que favoreció el desarrollo de una activa escuela matemática, así como la difusión de las ideas de Lie, hasta entonces muy poco conocidas (debido sobre todo al hecho de que sus primeras memorias estaban redactadas casi siempre en noruego, y publicadas en la Academia de Cristiania, con muy poca difusión en el extranjero). Así, por ejemplo, vemos que E. Vessiot y A. Tresse pasaron un año con Sophus Lie en Leipzig, en una época en la que no era demasiado habitual que los jóvenes franceses fuesen a estudiar a Alemania.

grupos de transformaciones, en el sentido de las ecuaciones (4), en las que el espacio de las «variables» x_i y el de los «parámetros» a_j desempeñan papeles igualmente importantes, en principio. Por otra parte, el concepto de grupo «abstracto» todavía no había sido puesto en evidencia, y si Lie señala en 1883 ([*202*], vol. 5, Abh. XII, pp. 311-313) que, con las notaciones de (10), la ecuación $w = H(u, v)$ que proporciona los parámetros de la transformación obtenida componiendo dos transformaciones del grupo define un nuevo grupo, lo hace considerándolo como *grupo de transformaciones* sobre el espacio de los parámetros, obteniendo de este modo lo que llama «grupo de los parámetros» (en realidad obtiene dos, que no son otra cosa que el grupo de las traslaciones a la derecha y el grupo de traslaciones a la izquierda) [8].

Se supone en principio que las variables x_i y los parámetros a_j de las ecuaciones (4) son complejos (con la excepción de los capítulos XIX y XXIV del t. 3) y que las funciones f_i son analíticas. Como es natural, Lie y Engel son perfectamente conscientes de que estas funciones no están definidas en general para todos los valores complejos de las x_i y de los a_j, lo que no puede por menos de originar serias dificultades a la hora de componer estas transformaciones ([*203*], t. 1, pp. 15-17, 33-40 y *pássim*) y, aunque en lo que sigue se expresan casi siempre como si la composición de las transformaciones consideradas fuese posible sin restricción, lo hacen sin duda para simplificar los enunciados, volviendo explícitamente al punto de vista «local» siempre que resulta necesario (cf. *l. c.*, p. 168 ó 189, por ejemplo, o *ibíd.*, t. 3, p. 2, nota de pie de página). Dicho de otro modo, el objeto matemático estudiado por ellos es algo bastante parecido a lo que nosotros llamaríamos un «trozo» de ley de operación. Lie y Engel no dejan de considerar, si viene a cuento, grupos globales, como, por ejemplo, en el caso de las 4 series de grupos clásicos ([*203*], t. 3, p. 682), pero no parecen haberse planteado la cuestión de lo que pueda ser en general un «grupo global», conformándose con poder obtener, para los parámetros de los grupos clásicos (las variables de estos grupos no presentan ninguna dificultad, puesto que se trata de transformaciones lineales de $\mathbf{C}^n$) sistemas de parámetros «locales» en un entorno de la identidad, sin preocuparse del dominio de validez de las fórmulas que escriben. De todos modos, se plantean un problema que se sale claramente de la teoría local [9]: el estudio de los grupos «mixtos», es decir, de los grupos que poseen un número finito de componentes conexas, como es el caso del grupo ortogonal ([*203*], t. 1, p. 7). Este estudio se presenta como el de un conjunto de transformaciones, estable para la composición y la inversión, que es unión de conjuntos H_j, cada uno de los cuales es descrito por un sistema de funciones $(f_i^{(j)})$ como en (4); suponen *a priori* que el número de parámetros (esenciales) de cada H_j puede depender de j, pero demuestran a continuación que de hecho este número es el mismo para todo j. El resultado fundamental obtenido es la existencia de un grupo finito y continuo G tal que $H_j = G \circ h_j$ para $h_j \in H_j$ y para todo j, estableciendo igualmente que G es distinguido en el grupo mixto, y señalando que la determinación de los invariantes de este último se reduce a la de los invariantes de G y de un grupo discontinuo ([*203*], t. 1, cap. 18).

[8] La noción análoga para los grupos de permutaciones había sido introducida y estudiada por Jordan en su *Tratado*.

La teoría general desarrollada en [*203*] culmina (sin que los autores lo indiquen de un modo demasiado sistemático) en un «diccionario» que permite pasar de las propiedades de los grupos «finitos y continuos» a las del conjunto de sus transformaciones infinitesimales. Este diccionario se basa en los «tres teoremas de Lie», formado cada uno de ellos por una afirmación y su recíproca.

El *primer teorema* ([*203*], t. 1, pp. 33 y 72 y t. 3, p. 563) afirma, en primer lugar, que si los parámetros de (4) son efectivos, entonces las funciones f_i verifican un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de la forma

$$(15) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial a_j} = \sum_{k=1}^{r} \xi_{ki}(f(x, a))\, \psi_{kj}(a) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

[9] Recordemos (p. 166) que, como consecuencia de una nota de H. Poincaré ([*251*], t. V, pp. 77-79), el grupo de los elementos inversibles de un álgebra asociativa de dimensión finita fue estudiado por diversos autores. Vale la pena señalar con este motivo que Study, en sus trabajos sobre el tema, introduce un simbolismo que (en lo fundamental) viene a reducirse a considerar el grupo abstracto definido por el grupo de los parámetros.

donde la matriz (ξ_{ki}) es de rango máximo y det $(\psi_{kj}) \neq 0$. Recíprocamente, si las funciones f_i poseen esta propiedad, las fórmulas (4) definen un «grupúsculo» de transformaciones.

El *segundo teorema* ([*203*, t. 1, pp. 149 y 158 y t. 3, p. 590) proporciona las relaciones entre las ξ_{ki}, por una parte, y las ψ_{ij} por otra. Las condiciones sobre las ξ_{ki} se escriben como

$$(16) \qquad \sum_{k=1}^{n}\left(\xi_{ik}\frac{\partial \xi_{jl}}{\partial x_k} - \xi_{jk}\frac{\partial \xi_{il}}{\partial x_k}\right) = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^{k}\xi_{kl}$$

$$(1 \leqslant i,\ j \leqslant r,\ 1 \leqslant 1 \leqslant n)$$

donde las c_{ij}^k son constantes $(1 \leqslant i, j, k \leqslant r)$ antisimétricas en i, j. Las condiciones sobre las ψ_{ij}, expresadas en la forma dada por Maurer, serían

$$(17) \qquad \frac{\partial \psi_{kl}}{\partial a_m} - \frac{\partial \psi_{km}}{\partial a_l} = \frac{1}{2}\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant r} c_{ij}^{k}(\psi_{il}\psi_{jm} - \psi_{jl}\psi_{im})$$

$$(1 \leqslant k, l, m \leqslant r).$$

Introduciendo la matriz (α_{ij}) contragrediente de (ψ_{ij}) y las transformaciones infinitesimales

$$(18) \qquad \mathrm{X}_k = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \mathrm{A}_k = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}\frac{\partial}{\partial a_j} \quad (1 \leqslant k \leqslant r)$$

las fórmulas (16) y (17) pueden escribirse, respectivamente,

$$(19) \qquad [\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^{k}\,\mathrm{X}_k$$

$$(1 \leqslant i, j \leqslant r).$$

$$(20) \qquad [\mathrm{A}_i, \mathrm{A}_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^{k}\,\mathrm{A}_k.$$

Recíprocamente, si se tiene r transformaciones infinitesimales $\mathrm{X}_k (1 \leqslant k \leqslant r)$ linealmente independientes que verifiquen las condiciones (19), los subgrupos uniparamétricos engendrados por estas transformaciones engendran un grupo de transformaciones con r parámetros esenciales.

Finalmente, el *tercer teorema* ([*203*], t. 1, pp. 170 y 297 y t. 3, p. 597) permite reducir la determinación de los sistemas de transformaciones infinitesimales que verifican (19) a un problema puramente algebraico. Se tiene entonces

$$(21) \qquad c_{ij}^{k} + c_{ji}^{k} = 0$$

$$(22) \qquad \sum_{l=1}^{r}(c_{il}^{m}c_{jk}^{l} + c_{kl}^{m}c_{ij}^{l} + c_{jl}^{m}c_{ki}^{l}) = 0 \qquad (1 \leqslant i, j, k, m \leqslant r).$$

Recíprocamente [10], si se verifican (21) y (22), entonces existe un sistema de transformaciones infinitesimales que satisface las relaciones (19), lo que da lugar a un grupo de transformaciones con r parámetros (dicho de otro modo, las combinaciones lineales con coeficientes constantes de los X_k forman un álgebra de Lie, y, recíprocamente, toda álgebra de Lie de dimensión finita puede ser obtenida mediante este procedimiento).

Estos resultados son completados por el estudio de las cuestiones de isomorfismo. Se dice que dos grupos de transformaciones son *semejantes* si puede pasarse de uno a otro mediante una transformación inversible de coordenadas sobre las variables y una transformación inversible de coordenadas sobre los parámetros: ya al principio de sus trabajos había encontrado Lie esta noción de un modo natural a propósito de la definición de los «parámetros canónicos». Lie demuestra que dos grupos son semejantes si resulta posible «llevar» las transformaciones infinitesimales de uno sobre las del otro por medio de una transformación sobre las «variables» ([*203*], t. 1, p.329). Una condición necesaria para que así sea es que

[10] Este recíproco no fue obtenido sin ciertas dificultades. La primera demostración dada por Lie ([*202*], vol. 5, Abh. III, pp. 42-75), que consistía en pasar al grupo adjunto, solamente era válida en el caso de que el centro del álgebra de Lie considerada se reducía al **0**. Después dio dos demostraciones generales ([*203*], t. 2, cap. XVII y t. 3, pp. 599-604), y resulta bastante significativo el hecho de que la primera se base en las transformaciones de contacto y de que Lie la considere más natural que la segunda.

las álgebras de Lie de ambos grupos sean isomorfas, lo que Lie expresa diciendo que los grupos son «*gleichzusammengesetzt*». Pero esta condición no es suficiente y es necesario dedicar un capítulo entero ([*203*], t. 1, cap. 19) a la obtención de las condiciones suplementarias que nos aseguren que los grupos son «semejantes». Por otra parte, la teoría de los grupos de permutaciones proporcionaba la noción de «isomorfismo holoédrico» de estos grupos (isomorfismo de los grupos «abstractos» subyacentes); Lie traduce esta noción a los grupos de transformaciones y muestra que dos grupos de esta clase son «holoédricamente isomorfos» si y solamente si sus álgebras de Lie son isomorfas ([*203*], t. 1, p. 418). En particular, todo grupo de transformaciones resulta ser holoédricamente isomorfo a cada uno de sus grupos de parámetros, y esto sirve para poner de manifiesto que, cuando se quiere estudiar la estructura del grupo, las «variables» sobre las que opera el grupo carecen de importancia, y que de hecho todo se reduce al estudio del álgebra de Lie [11].

Continuando la analogía con la teoría de los grupos de permutaciones, Lie introduce las nociones de subgrupos, subgrupos distinguidos e «isomorfismos meriédricos» (homomorfismos suprayectivos), mostrando que corresponden a las de subálgebras, ideales, y homomorfismos suprayectivos de las álgebras de Lie. Además, Lie había encontrado muy pronto un ejemplo particularmente importante de «isomorfismo meriédrico», la representación adjunta, y se había apercibido de sus relaciones con el centro del grupo ([*202*], vol. 5, Abh. III, pp. 42-75). La herramienta fundamental para la obtención de estos resultados, así como para los teoremas fundamentales, es el teorema de Jacobi-Clebsch que proporciona la integrabilidad completa de un sistema diferencial (una de las formas del teorema llamado «de Frobenius»), del que da además una nueva demostración empleando los grupos uniparamétricos ([*203*], t. 1, cap. 6).

Las nociones de transitividad y primitividad, tan importantes para los grupos de permutaciones, aparecen de modo igualmente

[11] Es posible constatar una evolución semejante en la teoría de los grupos «abstractos», en particular en la de los grupos finitos. Al principio fueron definidos como grupos de transformaciones, pero ya Cayley llama la atención sobre el hecho de que lo fundamental es la manera de componerse las transformaciones entre ellas, y no la naturaleza de la representación concreta del grupo de permutaciones de objetos particulares.

natural en los grupos «finitos y continuos» de transformaciones, y en el tratado de Lie-Engel se hace un estudio detallado de ellas ([*203*], t. 1, cap. 13 y *pássim*), llegándose a percibir lejanamente las relaciones con los subgrupos estabilizadores de un punto y la noción de espacio homogéneo (en tanto que resultaba posible hacerlo sin adoptar el punto de vista global) ([*203*], t. 1, p. 425).

Finalmente, el «diccionario» se completa en [*203*] con la introducción de las nociones de grupo derivado y grupo resoluble (denominado por Lie «grupo integrable»; esta terminología, sugerida por la teoría de las ecuaciones diferenciales, continuará empleándose hasta los trabajos de H. Weyl) ([*203*], t. 1, p. 261 y t. 3, pp. 678-679). La relación entre los conmutadores y los corchetes ya había sido advertida por Lie en 1883 ([*202*], vol. 5, p. 358).

Otras demostraciones de los teoremas fundamentales

F. Schur muestra (en [*278* b]) que, en coordenadas canónicas, las ψ_{ik} de (15) satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{dt}(t\psi_{ik}(ta)) = \delta_{ik} + \sum_{j,l} c_{jl}^{k} t a_l \psi_{ij}(ta) \tag{23}$$

Estas ecuaciones pueden integrarse dando una fórmula equivalente a la

$$\varpi(X) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)!}(ad(X))^n \tag{24}$$

para la diferencial derecha $\varpi(X)$ de la exponencial en el punto X; en particular, en coordenadas canónicas, las ψ_{ij} admiten una prolongación que es una función entera de las a_k. A partir de aquí, F. Schur deduce un resultado que viene a precisar una observación previa de Lie: si en la definición (4) de los grupos de transformaciones suponemos solamente que las f_i son de clase C^2, el grupo resulta ser holoédricamente isomorfo a un grupo analítico [12]. Como

[12] Lie había enunciado ya sin demostración un resultado de este género ([*202*], vol. 6, Abh. V, pp. 230-236), al que le habían conducido sus trabajos sobre

consecuencia de sus trabajos sobre la integración de sistemas diferenciales, E. Cartan introduce en 1904 ([*52* a], t. II_2, p. 371) las formas de Pfaff

$$(25) \qquad \omega_k = \sum_{i=1}^{r} \psi_{ki} d\alpha_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

(con las notaciones de (15)), que recibirían posteriormente el nombre de *formas de Maurer-Cartan*. Las condiciones (17) de Maurer se escriben entonces

$$d\omega_k = -\tfrac{1}{2} \sum_{i,j} c_{ij}^k \, \omega_i \wedge \omega_j.$$

E. Cartan muestra cómo puede desarrollarse la teoría de los grupos finitos y continuos a partir de los ω_k, estableciendo la equivalencia entre este punto de vista y el de Lie. Pero para Cartan el interés de este método reside fundamentalmente en el hecho de que se adapta al caso de los «grupos infinitos y continuos», cuya teoría desarrolla mucho más de lo que lo hubiera hecho Lie, y también en que le permite edificar su teoría del «sistema de referencia móvil» generalizado.

los fundamentos de la geometría («problema de Helmholtz»), en los que se había dado cuenta de que las hipótesis de analiticidad no eran naturales.

El resultado de F. Schur llevaría a Hilbert a preguntarse, en 1900, si la misma conclusión seguiría siendo válida si las f_i eran solamente continuas («quinto problema de Hilbert»). Este problema ha dado lugar a numerosos trabajos, el resultado más completo en esta dirección es el teorema siguiente (demostrado por A. Gleason, D. Montgomery, y L. Zippin): todo grupo topológico localmente compacto posee un subgrupo abierto que es un límite proyectivo de grupos de Lie; esto implica que todo grupo localmente euclídeo es un grupo de Lie. Para más detalles sobre esta cuestión, véase [*226*].

IV. La teoría de las álgebras de Lie

Una vez que se ha llegado a la correspondencia entre los grupos de transformaciones y las álgebras de Lie, la teoría toma un carácter mucho más algebraico, centrándose en el estudio a fondo de las álgebras de Lie [13].

Un primer período bastante corto, desde 1888 hasta 1894, marcado por los trabajos de Engel, de su discípulo Umlauf, y, sobre todo, de Killing y de E. Cartan, da lugar a una serie de resultados espectaculares sobre las álgebras de Lie complejas. Hemos visto más arriba que la noción de álgebra de Lie resoluble se debe al propio Lie, que había demostrado (en el caso complejo) el teorema de reducción de las álgebras de Lie lineales resolubles a la forma triangular ([*203*], t. 1, p. 270) [14]. Killing observa [*180*] que en un álgebra de Lie existe un ideal resoluble máximo (lo que llamamos hoy día el radical) y que el cociente del álgebra de Lie por su radical tiene un radical nulo; da el nombre de *semisimples* a las álgebras de Lie de radical nulo y demuestra que se trata de productos de álgebras simples (noción esta última que había sido introducida por Lie, que había demostrado también la simplicidad de las álgebras de Lie «clásicas» ([*203*], t. 3, p. 682)).

Por otra parte, Killing introduce, para un álgebra de Lie, la ecuación característica $\det(\mathrm{ad}(x) - \omega.1) = 0$, que Lie había encontrado ya en el estudio de las subálgebras de Lie de dimensión 2 que contienen un elemento dado de un álgebra de Lie. Remitimos a otras notas históricas para el análisis de los métodos mediante los cuales Killing, con un estudio penetrante de las propiedades

[13] El término «álgebra de Lie» fue introducido por H. Weyl en 1934; en sus trabajos de 1925 había empleado la expresión «grupo infinitesimal». Antes se hablaba sencillamente de las «transformaciones infinitesimales $X_1 f, \cdots, X_r f$» del grupo, y Lie y Engel utilizan frecuentemente la abreviatura «el grupo $X_1 f, \cdots, X_r f$» (!).

[14] Casi en el momento de comenzar sus trabajos, Lie había encontrado ya grupos lineales resolubles, e incluso nilpotentes ([*202*], vol. 5, Abh. IV, pp. 78-133).

de las raíces de la ecuación característica «genérica» para un álgebra semisimple, llega al más notable de todos sus resultados, la determinación *completa* de las álgebras de Lie simples (complejas) [15].

Killing prueba que el álgebra derivada de un álgebra resoluble es «de rango 0» (lo que quiere decir que ad$x$ es nilpotente para todo elemento x del álgebra). Engel demuestra poco después que las álgebras «de rango 0» son resolubles (este enunciado es en sustancia lo que se llama hoy día teorema de Engel). Por otra parte, Cartan introduce en su tesis lo que se llama ahora «forma de Killing», estableciendo los dos criterios fundamentales que caracterizan por medio de esta forma las álgebras de Lie resolubles y las álgebras de Lie semisimples.

Killing había afirmado ([*180*], IV) que el álgebra derivada de un álgebra de Lie es suma de un álgebra semisimple y de su radical, que es nilpotente, pero su demostración era incompleta. E. Cartan anuncia sin demostración ([*52* a], t. I_1, p. 104) un resultado más general: toda álgebra de Lie es suma de su radical y de una subálgebra semisimple, y el único resultado en esta dirección establecido sin discusión posible en esta época es un teorema de Engel que afirma la existencia en toda álgebra de Lie no resoluble, de una subálgebra de Lie simple de dimensión 3. La primera demostración publicada (para las álgebras de Lie complejas) del enunciado de Cartan se debe a E. E. Levi [*200*], y J. H. C. Whitehead daría otra demostración (válida también para el caso real) en 1936 [*334* a]. A. Malcev completa este resultado en 1942 con el teorema de unicidad (salvo una conjugación) de las «secciones de Levi».

Lie se había planteado desde sus primeros trabajos el problema del isomorfismo de toda álgebra de Lie con un álgebra de Lie lineal, y había creído resolverlo afirmativamente considerando la representación adjunta (deduciendo de este modo una demostración de su «tercer teorema») ([*202*], vol. 5, Abh. III, pp. 42-75). Pero se dio cuenta rápidamente de que su demostración solamente era válida en el caso de las álgebras de Lie de centro nulo, y, después

[15] Salvo que encuentra dos álgebras excepcionales de dimensión 52, cuyo isomorfismo le pasa desapercibido. (Se trata únicamente de álgebras de Lie simples complejas, puesto que en esta época no se consideraba ningún problema más general; de hecho los métodos de Killing son válidos para todo cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero).

de él, la cuestión permaneció abierta durante largo tiempo, hasta ser resuelta afirmativamente por Ado en 1935 [*2* a]. Por otro lado, Lie se había planteado (en lo fundamental) el problema de determinar las representaciones lineales de dimensión mínima de las álgebras de Lie simples, resolviéndolo para las álgebras clásicas. Cartan resuelve también este problema en su tesis para las álgebras simples excepcionales [16], y los métodos que emplea con este fin serán generalizados por él mismo veinte años después a fin de obtener todas las representaciones irreductibles de las álgebras de Lie simples reales o complejas.

La propiedad de reductibilidad completa de una representación lineal parece haber sido encontrada por primera vez (en una forma geométrica) por Study. En un manuscrito no publicado, pero que es citado en ([*203*], t. 3, pp. 785-788), demuestra esta propiedad para las representaciones lineales del álgebra de Lie de **SL**(2, **C**), y obtiene resultados parciales para **SL**(3, **C**) y **SL**(4, **C**), lo que permite a Lie y Engel conjeturar que el teorema de reducibilidad completa es válido para **SL**(n, **C**) cualquiera que sea n. La reducibilidad completa de las representaciones lineales de las álgebras de Lie semisimples fue establecida por H. Weyl en 1925 [17] empleando un argumento de naturaleza global (véase más abajo). La primera demostración algebraica fue obtenida en 1935 por Casimir y van der Waerden [*55*], otras demostraciones algebraicas fueron dadas posteriormente por R. Brauer [*34* b] y J. H. C. Whitehead (334 b].

Por último, digamos que en el curso de sus trabajos sobre la aplicación exponencial (cf. *infra*), H. Poincaré ([*251*], t. III) considera el álgebra asociativa de operadores diferenciales de todos los órdenes, engendrada por los operadores de un álgebra de Lie, demostrando en sustancia que, si $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ es una base del álgebra de Lie, el álgebra asociativa engendrada por los X_i tiene como base ciertas funciones simétricas de las X_i (sumas de «monomios» no conmutativos deducidos a partir de un monomio dado por todas las permutaciones de los factores). Su demostración es esencialmente alge-

[16] El punto de vista de Cartan consiste en estudiar las álgebras de Lie que son extensiones no triviales de un álgebra de Lie simple y de un radical (conmutativo) de dimensión mínima.

[17] H. Weyl aprovecha esta ocasión para señalar que Cartan utiliza implícitamente esta propiedad en su construcción de las representaciones irreducibles.

braica, y le permite obtener la estructura del álgebra envolvente. Demostraciones análogas fueron dadas en 1937 por G. Birkhoff [*22* b] y E. Witt [*337* b][18].

La mayor parte de los trabajos que acabamos de citar se limitan al caso de las álgebras de Lie reales o complejas, que son las únicas que corresponden a grupos de Lie en el sentido usual. El estudio de las álgebras de Lie sobre un cuerpo distinto de **R** o **C** fue emprendido por Jacobson [*172* a], demostrando que casi todos los resultados clásicos siguen siendo verdaderos para un cuerpo de característica cero.

V. Exponencial y fórmula de Hausdorff

Los primeros trabajos sobre la aplicación exponencial se deben a E. Study y F. Engel; Engel [*104* b] señala que la exponencial no es suprayectiva para **SL**(2, **C**) (por ejemplo $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ no es una exponencial si $a \neq 0$), pero que sí lo es para **GL**(n, **C**), y por tanto para **PGL**(n, **C**) (propiedad esta última que había sido observada por Study para $n = 2$). Tendríamos por tanto un ejemplo de dos grupos localmente isomorfos como **SL**(2, **C**) y **PGL**(2, **C**) que son, sin embargo, muy diferentes desde el punto de vista global. Engel muestra igualmente que la exponencial es suprayectiva en los demás grupos clásicos, a los que se han añadido las homotecias; estos trabajos son continuados por Maurer, Study y otros, sin aportar ninguna novedad fundamental.

H. Poincaré aborda en 1899 ([*251*], t. III, pp. 169-172 y 173-212) el estudio de la exponencial desde un punto de vista diferente. Sus memorias parecen haber sido redactadas con cierta precipitación,

[18] El primer caso de utilización de los operadores diferenciales de orden superior engendrados por los X_i es sin duda el del uso del «operador de Casimir» para la demostración del teorema de reducibilidad completa. Los trabajos realizados después de 1950 por Gelfand y su escuela y por Harish-Chandra sobre las representaciones lineales de dimensión infinita han contribuido a situarlos en primer plano.

puesto que afirma en varios lugares que todo elemento de un grupo conexo es una exponencial, mientras que en otros da ejemplos de cómo no es así. Sus resultados se refieren fundamentalmente al grupo adjunto, mostrando que un elemento semisimple de un grupo G de esta clase puede ser la exponencial de una infinidad de elementos del álgebra de Lie L(G), mientras que un elemento no semisimple no puede ser una exponencial. Si ad(X) no tiene ningún valor propio que sea un múltiplo no nulo de $2\pi i$, entonces exp es plana en X. Poincaré demuestra también que si U y V recorren caminos cerrados en L(G), y si se define por continuidad W de modo que se tenga $e^U \cdot e^V = e^W$, no se obtiene necesariamente la determinación inicial de W. Para ello utiliza una fórmula de residuos que es esencialmente

$$\phi(\mathrm{adX}) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\phi(\xi)d\xi}{\xi - \mathrm{adX}}$$

donde ad(X) es un elemento semisimple cuyos valores propios no nulos son de multiplicidad 1, ϕ una serie entera de radio de convergencia suficientemente grande, y estando la integral extendida a una curva cerrada que deja en su interior los valores propios de ad(X), estudiándose igualmente lo que sucede cuando X tiende hacia una transformación cuyos valores propios son múltiples.

La búsqueda de expresiones de W en función de U y de V en la fórmula $e^U \cdot e^V = e^W$ había dado lugar, poco antes de los trabajos de Poincaré, a dos memorias de Campbell [*46* a y b]. Como escribe algo después Baker: «... *la teoría de Lie sugiere de manera evidente que el producto* $e^U e^V$ *es de la forma* e^W, *siendo W una serie de alternantes en U y en V*...» Los trabajos posteriores sobre el tema están orientados a precisar esta afirmación y a la obtención de una fórmula explícita (o un método de construcción) para W («fórmula de Hausdorff»). Después de Campbell y de Poincaré, Pascal, Baker [*13*], y Hausdorff [*152* a] vuelven a ocuparse de la cuestión. Cada uno de ellos considera que las demostraciones de sus predecesores no son convincentes; la dificultad principal reside en el sentido que debe darse a la palabra «alternante»; se trata de saber si los alternantes han de ser elementos del álgebra de Lie concreta que se estudia o más bien expresiones «simbólicas» universales. Ni Campbell, ni Poincaré, ni Baker, se expresan claramente sobre este punto.

Por el contrario, la memoria de Hausdorff es precisa a más no poder, comienza trabajando en el álgebra de series formales asociativas (no conmutativas) en un número finito de indeterminadas, y considera U, V, y W como elementos de este álgebra. La existencia de W es demostrada mediante un argumento «de ecuación diferencial» análogo al de sus predecesores, argumento que le servirá igualmente para probar la convergencia de la serie cuando se sustituyen las indeterminadas por elementos de un álgebra de Lie de dimensión finita. Como habían señalado independientemente Baker y Poincaré, este resultado puede ser empleado para dar una demostración del tercer teorema de Lie, y contribuye también a iluminar las relaciones entre grupos y álgebras de Lie en lo que se refiere, por ejemplo, al grupo de los conmutadores.

En 1947, Dynkin [*98* a] vuelve a ocuparse de la cuestión, obteniendo los coeficientes explícitos de la fórmula de Hausdorff mediante la consideración al principio de un álgebra de Lie normada (de dimensión finita o infinita, sobre **R**, **C**, o un cuerpo ultramétrico) [19].

VI. Representaciones lineales y grupos de Lie. Globales

El problema de la definición y el estudio de los grupos de Lie globales no era atacado de frente en ninguno de los trabajos de los que hemos hablado anteriormente. Es H. Weyl quien da los primeros pasos en esta dirección, inspirándose para ello en dos teorías que se habían venido desarrollando independientemente hasta el momento: la de las representaciones lineales de las álgebras de Lie semisimples complejas, debida a E. Cartan, y la de las representaciones lineales de los grupos finitos, debida a Frobenius, y que acababa de ser trasladada al grupo ortogonal por I. Schur, utilizando una idea de Hurwitz. Este último había indicado [*168*] la

[19] En el caso ultramétrico es necesario tomar una serie de precauciones a la hora de extender el método clásico de los mayorantes, debido al comportamiento asintótico del valor absoluto p-ádico de $1/n$ cuando n tiende a infinito.

manera de formar invariantes para el grupo ortogonal o el grupo unitario remplazando la operación de media sobre un grupo finito por una integración con respecto a una medida invariante. Hurwitz había señalado igualmente que la aplicación de este método al grupo unitario permite la obtención de los invariantes para el grupo lineal general, primer ejemplo conocido de «unitarian trick». I. Schur emplea este procedimiento en 1924 [*279* e] para mostrar la reducibilidad completa de las representaciones del grupo ortogonal **O**(n) y del grupo unitario **U**(n), mediante la construcción de una forma hermítica positiva no degenerada invariante, deduciendo a partir de aquí (con ayuda del «unitarian trick»), la reducibilidad completa de las representaciones holomorfas de **O**(n, **C**) y de **SL**(n, **C**), estableciendo las relaciones de ortogonalidad para los caracteres de **O**(n) y **U**(n), y determinando los caracteres de **O**(n). H. Weyl extiende inmediatamente este método a las álgebras de Lie semisimples complejas [*331* b]. Weyl demuestra para un álgebra $\mathfrak{g}$ de este tipo la existencia de una «forma real compacta» (o, dicho de otro modo, que se obtiene a partir de un álgebra $\mathfrak{g}_o$ sobre **R** cuyo grupo adjunto G_o es compacto, mediante una extensión del cuerpo de escalares de **R** a **C**). Weyl demuestra también que el grupo fundamental de G_o es finito, y que por tanto el recubrimiento universal [20] de G_o es compacto, deduciendo a partir de lo anterior, mediante una adaptación conveniente del procedimiento de Schur, la reducibilidad completa de las representaciones de $\mathfrak{g}$, y da también, por vía global, la determinación de los caracteres de las representaciones de $\mathfrak{g}$. En una carta a I. Schur [*331* a], H. Weyl resume los resultados de Cartan, que Schur no conocía (cf. [*279* e], p. 299, nota de pie de página), y compara los dos puntos de vista: el método de Cartan proporcionaba todas las representaciones holomorfas del grupo simplemente conexo del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, obteniéndose de este modo, en el caso del grupo ortogonal, representaciones de un recubrimiento con dos hojas (que se llamaría más tarde grupo de spinores), a lo

[20] H. Weyl no define explícitamente esta noción, con la que estaba familiarizado desde la redacción de su curso sobre las superficies de Riemann (1913), y es O. Schreier [*276* a y b] el que da por primera vez, en 1926-27, la definición de grupo topológico y la de grupo «continuo» (i.e. localmente homeomorfo a un espacio euclídeo), así como la construcción del recubrimiento universal de un grupo de este tipo.

Por el contrario, la memoria de Hausdorff es precisa a más no poder, comienza trabajando en el álgebra de series formales asociativas (no conmutativas) en un número finito de indeterminadas, y considera U, V, y W como elementos de este álgebra. La existencia de W es demostrada mediante un argumento «de ecuación diferencial» análogo al de sus predecesores, argumento que le servirá igualmente para probar la convergencia de la serie cuando se sustituyen las indeterminadas por elementos de un álgebra de Lie de dimensión finita. Como habían señalado independientemente Baker y Poincaré, este resultado puede ser empleado para dar una demostración del tercer teorema de Lie, y contribuye también a iluminar las relaciones entre grupos y álgebras de Lie en lo que se refiere, por ejemplo, al grupo de los conmutadores.

En 1947, Dynkin [*98* a] vuelve a ocuparse de la cuestión, obteniendo los coeficientes explícitos de la fórmula de Hausdorff mediante la consideración al principio de un álgebra de Lie normada (de dimensión finita o infinita, sobre **R**, **C**, o un cuerpo ultramétrico) [19].

VI. Representaciones lineales y grupos de Lie. Globales

El problema de la definición y el estudio de los grupos de Lie globales no era atacado de frente en ninguno de los trabajos de los que hemos hablado anteriormente. Es H. Weyl quien da los primeros pasos en esta dirección, inspirándose para ello en dos teorías que se habían venido desarrollando independientemente hasta el momento: la de las representaciones lineales de las álgebras de Lie semisimples complejas, debida a E. Cartan, y la de las representaciones lineales de los grupos finitos, debida a Frobenius, y que acababa de ser trasladada al grupo ortogonal por I. Schur, utilizando una idea de Hurwitz. Este último había indicado [*168*] la

[19] En el caso ultramétrico es necesario tomar una serie de precauciones a la hora de extender el método clásico de los mayorantes, debido al comportamiento asintótico del valor absoluto p-ádico de $1/n$ cuando n tiende a infinito.

manera de formar invariantes para el grupo ortogonal o el grupo unitario remplazando la operación de media sobre un grupo finito por una integración con respecto a una medida invariante. Hurwitz había señalado igualmente que la aplicación de este método al grupo unitario permite la obtención de los invariantes para el grupo lineal general, primer ejemplo conocido de «unitarian trick». I. Schur emplea este procedimiento en 1924 [*279* e] para mostrar la reducibilidad completa de las representaciones del grupo ortogonal **O**(n) y del grupo unitario **U**(n), mediante la construcción de una forma hermítica positiva no degenerada invariante, deduciendo a partir de aquí (con ayuda del «unitarian trick»), la reducibilidad completa de las representaciones holomorfas de **O**(n, **C**) y de **SL**(n, **C**), estableciendo las relaciones de ortogonalidad para los caracteres de **O**(n) y **U**(n), y determinando los caracteres de **O**(n). H. Weyl extiende inmediatamente este método a las álgebras de Lie semisimples complejas [*331* b]. Weyl demuestra para un álgebra $\mathfrak{g}$ de este tipo la existencia de una «forma real compacta» (o, dicho de otro modo, que se obtiene a partir de un álgebra $\mathfrak{g}_0$ sobre **R** cuyo grupo adjunto G_0 es compacto, mediante una extensión del cuerpo de escalares de **R** a **C**). Weyl demuestra también que el grupo fundamental de G_0 es finito, y que por tanto el recubrimiento universal [20] de G_0 es compacto, deduciendo a partir de lo anterior, mediante una adaptación conveniente del procedimiento de Schur, la reducibilidad completa de las representaciones de $\mathfrak{g}$, y da también, por vía global, la determinación de los caracteres de las representaciones de $\mathfrak{g}$. En una carta a I. Schur [*331* a], H. Weyl resume los resultados de Cartan, que Schur no conocía (cf. [*279* e], p. 299, nota de pie de página), y compara los dos puntos de vista: el método de Cartan proporcionaba todas las representaciones holomorfas del grupo simplemente conexo del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, obteniéndose de este modo, en el caso del grupo ortogonal, representaciones de un recubrimiento con dos hojas (que se llamaría más tarde grupo de spinores), a lo

[20] H. Weyl no define explícitamente esta noción, con la que estaba familiarizado desde la redacción de su curso sobre las superficies de Riemann (1913), y es O. Schreier [*276* a y b] el que da por primera vez, en 1926-27, la definición de grupo topológico y la de grupo «continuo» (i.e. localmente homeomorfo a un espacio euclídeo), así como la construcción del recubrimiento universal de un grupo de este tipo.

que Schur no había llegado. Por otro lado, el método de Schur tendría la ventaja de demostrar la reducibilidad completa y de dar explícitamente los caracteres.

Después de los trabajos de Weyl, E. Cartan adopta un punto de vista decididamente global en sus investigaciones sobre los espacios simétricos y los grupos de Lie. Este punto de vista es la clave de su exposición de 1930 ([*52* a], t. I_2, pp. 1165-1225) de la teoría de los grupos «finitos y continuos», en la que encontramos en particular la primera demostración de la variante global del tercer teorema fundamental (existencia de un grupo de Lie con un álgebra de Lie dada); Cartan muestra además que todo subgrupo cerrado de un grupo de Lie real es un grupo de Lie, lo que generaliza un resultado de J. von Neumann sobre los subgrupos cerrados del grupo lineal [*324* b]. Von Neumann demostraba también en dicha memoria que toda representación continua de un grupo semisimple complejo es analítica real.

Puede decirse después de todos estos trabajos que las grandes líneas de la teoría de los grupos de Lie en sentido «clásico» (es decir, de dimensión finita sobre **R** o **C**) están más o menos trazadas. La primera exposición detallada es dada por Pontrjagin en su libro sobre los grupos topológicos [*253*], conservando un punto de vista bastante próximo del de Lie, pero distinguiendo cuidadosamente los aspectos locales de los globales. Le sigue el libro de Chevalley [*62* d], en el que se encuentra la primera discusión sistemática de la teoría de las variedades analíticas y del cálculo diferencial exterior; las «transformaciones infinitesimales» de Lie aparecen aquí como campos de vectores, y el álgebra de Lie de un grupo de Lie es identificada con el espacio de los campos de vectores invariantes a la izquierda sobre G. Los aspectos «grupúsculo» y «grupo de transformaciones» son dejados de lado.

VII. Extensiones de la noción de grupo de Lie

La vitalidad de la teoría de Lie se pone de manifiesto en nuestros días en la diversidad de sus aplicaciones (en topología, geometría diferencial, aritmética, etc.), así como en la creación de teorías paralelas en las que la estructura de variedad diferenciable subyacente es remplazada por una estructura vecina (variedad *p*-ádica, algebraica, esquema, esquema formal, ...) No vamos a ocuparnos ahora de la historia de todas estas cuestiones, limitándonos únicamente a dos de ellas: los grupos de Lie sobre los espacios de Banach y los grupos de Lie *p*-ádicos.

a) *Grupos de Lie sobre los espacios de Banach*

Se trata de los grupos de Lie de «dimensión infinita». Desde un punto de vista local se trataría de remplazar un entorno del origen en un espacio euclídeo por un entorno del origen en un espacio de Banach. Esto es lo que hace G. Birkhoff en 1936 [*22* a], dando de este modo lugar a la noción de *álgebra de Lie normada completa*, y a su correspondencia con un «grupúsculo» definido sobre un abierto de un espacio de Banach. Dynkin completa estos resultados hacia 1950 con una extensión a este caso de la fórmula de Hausdorff (cf. *supra*).

Las definiciones y los resultados de Birkhoff y Dynkin son locales. Hasta una fecha reciente, no parece que se haya intentado explicitar la teoría global correspondiente, a causa sin duda de la ausencia de aplicaciones.

b) *Grupos de Lie* p-*ádicos*

Estos grupos aparecen por primera vez en los trabajos de Hensel de 1907 [*157* e] sobre las funciones analíticas *p*-ádicas (definidas por desarrollos en serie entera). Hensel estudia sobre todo la exponencial y el logaritmo, y a pesar del comportamiento *a priori* sorprendente de las series que los definen (por ejemplo, la serie exponencial no converge en todas partes), sus propiedades funcionales fundamentales continúan siendo válidas, lo que proporciona un *isomorfismo local* entre el grupo aditivo y el grupo multiplicativo de $\mathbf{Q}_p$ (o, de manera más general, de todo cuerpo ultramétrico completo de característica cero).

En los trabajos de A. Weil [*330* a] y E. Lutz [*210*] sobre las curvas elípticas *p*-ádicas (1936) se consideran igualmente grupos conmuta-

tivos (pero esta vez no lineales). Además de las aplicaciones aritméticas, encontramos la construcción de un isomorfismo local del grupo con el grupo aditivo, basado en la integración de una forma diferencial invariante. Este método es igualmente aplicable a las variedades abelianas, como señala poco después C. Chabauty, que lo emplea sin dar más explicaciones para demostrar un caso particular de la «conjetura de Mordell» [*61*].

A partir de este momento resultaba evidente que la teoría *local* de los grupos de Lie se aplicaba sin apenas modificaciones al caso p-ádico. Los teoremas fundamentales del «diccionario» grupos de Lie-álgebras de Lie son establecidos en 1942 en la tesis de R. Hooke [*166*], discípulo de Chevalley. En este trabajo se encuentra igualmente el teorema p-ádico correspondiente al teorema de E. Cartan sobre los subgrupos cerrados de los grupos de Lie reales.

Más recientemente, M. Lazard [*195* b] desarrolla una forma más precisa de «diccionario» para los grupos analíticos compactos sobre $\mathbf{Q}_p$, mostrando que la existencia de una estructura analítica p-ádica sobre un grupo compacto G está estrechamente ligada a la de ciertas filtraciones sobre G, y da diversas aplicaciones de este hecho (a la cohomología de G, por ejemplo). Una de las herramientas empleadas por Lazard es una mejora de los resultados de Dynkin sobre la convergencia de la serie de Hausdorff p-ádica [*195* a].

VIII. Algebras de Lie libres

Debemos hablar todavía de una serie de trabajos sobre las *álgebras de Lie* cuya relación con los *grupos de Lie* es sumamente tenue; por el contrario, dichos trabajos son susceptibles de aplicaciones importantes a la teoría de los grupos «abstractos» y, sobre todo, a la de los grupos nilpotentes.

El origen de lo anterior se encuentra en el trabajo de P. Hall [*144*] aparecido en 1932. No se trata de estudiar las álgebras de Lie, sino una clase determinada de p-grupos, que Hall llama «regulares». Pero esto le lleva a considerar con detalle los conmutadores iterados y la sucesión central descendente de un grupo, lo que le da ocasión

de establecer una variante de la identidad de Jacobi, así como la «fórmula de Hall».

$$(xy)^n = x^n y^n (x, y)^{n(1-n)/2} \dots$$

Poco después aparecen (en 1935-37) los trabajos fundamentales de W. Magnus [*215* a y b] y E. Witt [*337* b]. Magnus emplea en [*215* a] la misma álgebra de series formales $\hat{A}$ que Hausdorff (que será llamada posteriormente «álgebra de Magnus»), sumergiendo en ella el grupo libre F y utilizando la filtración natural de $\hat{A}$ para obtener una sucesión decreciente (F_n) de subgrupos de F; se trata de uno de los primeros ejemplos de *filtración*. Magnus conjetura que los F_n coinciden con los términos de la sucesión central descendente de F, conjetura que demuestra en su segunda memoria [*215* b], en la que pone igualmente de manifiesto de modo explícito el parentesco entre sus ideas y las de P. Hall, definiendo también el álgebra de Lie libre L (como subálgebra de $\hat{A}$) y mostrando en sustancia que se identifica con el graduado de F. Witt completa este resultado en distintos puntos en [*337* b], mostrando sobre todo que el álgebra envolvente de L es un álgebra asociativa libre, y deduciendo inmediatamente a partir de aquí el rango de las componentes homogéneas de L («fórmulas de Witt»).

En lo que se refiere a la determinación de la base de L que recibe el nombre de «base de Hall», parece que no se encuentra hasta 1950, en una nota de M. Hall [*143*], aunque esté contenida implícitamente en los trabajos de P. Hall y W. Magnus que hemos citado más arriba.

GRUPOS ENGENDRADOS POR REFLEXIONES; SISTEMAS DE RAICES

Los grupos considerados en esta nota han ido surgiendo a propósito de toda una serie de cuestiones variadas de Geometría, de Análisis, y de Teoría de grupos de Lie, bien sea en forma de grupos de transformaciones, bien de grupos de desplazamientos en geometría euclídea o hiperbólica, y todos estos puntos de vista no han sido coordinados hasta una fecha reciente.

Históricamente hablando, los comienzos de la teoría son bastante anteriores a la introducción de la noción de grupo. En efecto, su origen está en los estudios de la «regularidad» o las «simetrías» de las figuras geométricas, y sobre todo en la determinación de los polígonos y los poliedros regulares (remontándose sin duda a los Pitagóricos), que constituye la coronación de los *Elementos* de Euclides y una de las creaciones más dignas de admiración del genio griego. Más tarde, sobre todo en los autores árabes de la Alta Edad Media, y después en Kepler, aparecen los esbozos de una teoría matemática de las maneras de «pavimentar» el plano o la esfera por medio de polígonos congruentes dos a dos (pero no necesariamente regulares), lo que sin duda estaba ligado en su origen a los distintos tipos de ornamentación imaginados por las civilizaciones antiguas y la árabe, lo que puede ser considerado con todo derecho como una parte de las matemáticas desarrolladas por estas civilizaciones [*291*].

Hacia 1830-40, los estudios de cristalografía (Hessel, Bravais, Möbius) dan lugar al estudio de un problema que es exactamente el de la determinación de los grupos finitos de desplazamientos en es espacio euclídeo de dimensión 3. Los autores que acabamos de citar no emplean aún el lenguaje de la teoría de grupos, que no empieza a ser usado con cierta frecuencia hasta 1860, y Jordan, en 1869 [*174* b], determina, pero bajo la forma de una clasificación de grupos, los subgrupos discretos de desplazamientos de $\mathbf{R}^3$ que conservan la orientación (y, de un modo más general, todos los subgrupos *cerrados* del grupo de los desplazamientos que conservan la orientación).

Esta corriente de ideas se desarrolla en varias direcciones hasta los últimos años del siglo XIX. Las más importantes son las siguientes:

1.º De acuerdo con una tendencia que surge muy pronto en la teoría de grupos finitos, se intenta «presentar» los grupos finitos de desplazamientos por medio de generadores y relaciones de un tipo sencillo. En esta línea demuestra Hamilton, ya en 1856 [*145* b], que los grupos finitos de rotaciones en el espacio euclídeo $\mathbf{R}^3$ son engendrados por dos generadores S y T ligados por las relaciones $S^p = T^q = (ST)^3 = 1$, para valores convenientes de p y q.

2.º Puede darse el caso de que los grupos discretos de desplazamientos contengan *reflexiones* o de que no sea así. Möbius determina ya en 1852 (en lo fundamental) los grupos finitos de desplazamientos en geometría esférica *engendrados por reflexiones* (lo que equivale a la resolución del mismo problema para los grupos finitos de desplazamientos euclídeos en $\mathbf{R}^3$), encontrando que, si exceptuamos los grupos cíclicos, un grupo de este tipo tiene como dominio fundamental un triángulo esférico cuyos ángulos son de la forma π/p, π/q, π/r, donde p, q, y r son tres enteros > 1 tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$ ([*223*], t. II, pp. 349-360 y pp. 561-708). Möbius señala también que estos grupos contienen todos los grupos finitos de desplazamientos como subgrupos.

3.º La amplitud de esta última corriente de ideas aumenta considerablemente cuando, como consecuencia de los trabajos de Riemann y Schwarz sobre la serie hipergeométrica y la representación conforme, se inicia el estudio de los «pavimentos» del plano

complejo o del semiplano por medio de figuras limitadas por arcos de círculo, lo que proporciona a Klein y Poincaré la base para su teoría de las «funciones automorfas», dándose cuenta de que se trata (para el caso de arcos de círculo ortogonales a una recta fija) de un problema equivalente al de hallar los subgrupos discretos de desplazamientos del plano no euclídeo hiperbólico (identificado con el «semiplano de Poincaré») [*118*].

4.º Las nociones de poliedro regular y de «pavimentación» de $\mathbf{R}^3$ por medio de estos poliedros son extendidas a todos los espacios $\mathbf{R}^n$ por Schläfli en un trabajo que se remonta poco más o menos a 1850, pero no publicado hasta mucho después, y que fue ignorado por largo tiempo ([*273*], t. I, pp. 167-387). En él determina completamente los «politopos» regulares en cada $\mathbf{R}^n$, el grupo de desplazamientos que dejan invariante un politopo de este tipo, y un dominio fundamental de este grupo, que, como en el caso $n = 3$ estudiado por Möbius, es una «habitación» cuya intersección con la esfera $\mathbf{S}_{n-1}$ es un símplex esférico. Sin embargo, no ataca el problema inverso de la determinación de los grupos finitos de desplazamientos engendrados por las reflexiones en $\mathbf{R}^n$, y este problema no será resuelto hasta mucho más tarde por Goursat [*132*] para $n = 4$ y no lo será para n cualquiera hasta los trabajos de E. Cartan ([*52* a], t. I_2, pp. 1003-1020) y Coxeter [*70* c], sobre los que volveremos después.

Hacia 1890 comienza, con los primeros trabajos de Killing y de E. Cartan sobre los grupos de Lie, una nueva corriente de ideas que se desarrollará durante bastante tiempo sin ninguna relación con las anteriores. En su estudio de la estructura de las álgebras de Lie semisimples complejas, Killing [*180*] y E. Cartan ([*52* a], t. I_1, pp. 137-287) atribuyen desde el principio a ciertas formas lineales ω_α sobre una «subálgebra de Cartan» $\mathfrak{h}$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de esta clase, un papel fundamental; se trata de las «raíces» relativas a $\mathfrak{h}$, que reciben este nombre debido a que para Killing aparecen como raíces de la ecuación característica $\det(\mathrm{ad}\,(x) - \mathrm{T}) = 0$, consideradas como funciones de $x \in \mathfrak{h}$. Las propiedades de estas «raíces», establecidas por Killing y Cartan, pueden expresarse en el lenguaje geométrico actual diciendo que forman un «sistema

reducido de raíces», y demuestran a continuación que la clasificación de las álgebras de Lie semisimples complejas se reduce a la de los «sistemas de raíces» asociados, que se reduce a su vez a la determinación de ciertas matrices con coeficientes enteros (que recibirán después el nombre de «matrices de Cartan»). Killing y Cartan ponen igualmente en evidencia, para toda raíz ω_α, la existencia de una permutación involutiva S_α del conjunto de las raíces; utilizan de manera esencial la transformación $\mathrm{C} = \mathrm{S}_{\alpha 1}\mathrm{S}_{\alpha 2}\mathrm{S}_{\alpha l}$, producto de las permutaciones asociadas a l raíces que formen un sistema fundamental (transformación que ahora denominamos «transformación de Coxeter»), llegan incluso a extender esta transformación en una transformación lineal del espacio vectorial engendrado por las raíces fundamentales $\omega_{\alpha i}$ ($1 \leqslant i \leqslant l$), y estudian sus valores propios ([*180*], II, p. 20; [*52* a], t. I_1, p. 58). Pero ni Killing, ni Cartan al principio, parecen pensar en considerar el grupo $\mathfrak{G}'$ engendrado por las S_α, y cuando Cartan, algo después ([*52* a], t. I_1, pp. 293-353), determina el grupo de Galois $\mathfrak{G}$ de la ecuación característica

$$\det(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x) - \mathrm{T}) = 0$$

de un «elemento general» $x \in \mathfrak{h}$, comienza su estudio sin hacer intervenir los S_α. Treinta años después, influido ya por los trabajos de H. Weyl, demuestra ([*52* a], t. I_1, pp. 555-568) que $\mathfrak{G}$ tiene como subgrupo distinguido el grupo $\mathfrak{G}'$ y determina en todos los casos la estructura del grupo cociente $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$, que (en el caso de un álgebra simple $\mathfrak{g}$) es de orden 1 ó 2, salvo para el tipo D_4, para el que es isomorfo a $\mathfrak{G}_3$. Con este motivo da igualmente la interpretación de $\mathfrak{G}'$ como grupo inducido por los automorfismos interiores de un álgebra de Lie semisimple compleja que dejan estable una subálgebra de Cartan.

Acabamos de hacer alusión a los trabajos de H. Weyl que inauguran la interpretación geométrica del grupo $\mathfrak{G}'$ (llamado posteriormente «grupo de Weyl» de $\mathfrak{g}$). Al igual que habían hecho Killing y Cartan para la transformación C, Weyl tiene la idea de considerar las S_α como reflexiones en el espacio vectorial de las formas lineales sobre $\mathfrak{h}$. En la memoria de H. Weyl [*331* b] vemos aparecer igualmente el dominio fundamental del «grupo de Weyl afín» (sin que se indique demasiado claramente la relación con el «grupo de

Weyl» $\mathfrak{G}'$), que es utilizado en la demostración de que el grupo fundamental de un grupo compacto semisimple es finito, punto capital de su demostración de la reducibilidad completa de las representaciones lineales de un álgebra de Lie semisimple compleja. E. Cartan lleva a cabo poco después la síntesis de los puntos de vista globales de H. Weyl, de su propia teoría de las álgebras de Lie semisimples reales o complejas y de la teoría de los espacios de Riemann simétricos (que construye en esta época). En su memoria ([*52* a], t. I_2, pp. 793-840), Cartan completa la determinación de los politopos fundamentales del grupo de Weyl y del grupo de Weyl afín, introduciendo los retículos de pesos y de pesos radicales, y extiende lo anterior a los espacios simétricos, lo que le permite sobre todo encontrar los primeros ejemplos de sistemas de raíces no reducidos ([*52* a], t. I_2, pp. 1003-1020). En el artículo ([*52* a], t. I_2, pp. 867-989) se da la primera demostración del hecho de que todo grupo finito engendrado por reflexiones en $\mathbf{R}^n$ que sea irreducible posee un dominio fundamental cuya intersección con $\mathbf{S}_{n-1}$ es un símplex esférico. En dicho trabajo se demuestra igualmente, por medio de consideraciones geométricas, la unicidad de la raíz más grande (para un orden lexicográfico cualquiera sobre un sistema de raíces).

Van der Waerden [*317* b] demuestra algo más tarde, basándose en la memoria de H. Weyl, que la clasificación de las álgebras de Lie semisimples complejas es equivalente a la de los sistemas de raíces reducidos, limitándose para ello a consideraciones geométricas elementales (mientras que Killing y Cartan obtienen esta clasificación mediante complicados cálculos con determinantes). Casi simultáneamente, Coxeter determina explícitamente todos los grupos finitos irreducibles de desplazamientos euclídeos que son engendrados por reflexiones [*70* c], completando de este modo los resultados de la memoria de E. Cartan ([*52* a], t. I_2, pp. 793-840) que había determinado solamente los grupos «cristalográficos» (i.e., los asociados a un sistema de raíces, o susceptibles de ser sumergidos en un grupo discreto infinito de desplazamientos). Coxeter demuestra el año siguiente [*70* d] que los grupos finitos engendrados por reflexiones son los únicos grupos finitos (salvo un isomorfismo) que admiten una presentación mediante generadores involutivos $\mathbf{R}_i$ que verifican relaciones de la forma $(\mathbf{R}_i\mathbf{R}_j)^{m_{ij}} = 1$ (m_{ij} enteros),

y de aquí el nombre de «grupos de Coxeter» que se daría posteriormente a los grupos (finitos o infinitos) que admiten una presentación de este tipo.

Coxeter [*70* e], seguido por Witt [*337* c], parece haber sido el primero en tender un puente entre estas dos direcciones de trabajo. Ambos constatan que los grupos irreducibles infinitos de desplazamientos euclíceos engendrados por reflexiones se corresponden biunívocamente (salvo un isomorfismo) con las álgebras de Lie simples complejas. Witt da una nueva determinación de los grupos discretos de este tipo, extendiendo además el teorema de Coxeter que acabamos de recordar [*70* d] de tal modo que caracteriza igualmente los grupos de Coxeter isomorfos a los grupos discretos infinitos de desplazamientos euclídeos. Este resultado, junto con el hecho de que los grupos análogos de la geometría hiperbólica son también grupos de Coxeter [1], ha dado lugar al estudio decidido de estos últimos, preocupándose sobre todo al principio de una realización geométrica ([*71*], [*308* a]), y después de J. Tits [*308* b y c], en un marco puramente algebraico.

A partir de los trabajos de Witt, la teoría de los grupos de Lie semisimples y la de los grupos discretos engendrados por reflexiones no dejarán de influenciarse mutuamente del modo más beneficioso. Stiefel [*296*] hace notar en 1941 que los grupos de Weyl son exactamente los grupos finitos engendrados por las reflexiones que dejan invariante un retículo. Chevalley [*62* e] y Harish-Chandra [*149* a] dan en 1948-51 demostraciones *a priori* de la correspondencia biunívoca entre grupos «cristalográficos» y álgebras de Lie semisimples complejas, mientras que hasta entonces solamente se era capaz de verificar por separado este tipo de correspondencia sobre cada tipo de álgebra de Lie simple.

Por otra parte, hacia 1950, se percibe que los polinomios invariantes por el grupo de Weyl desempeñan un papel importante en la teoría de las representaciones lineales de dimensión infinita [*149* a]

[1] Estos grupos, muy estudiados en el caso de dimensión 2, sólo han sido considerados incidentalmente en el caso de dimensión $\geqslant 3$ hasta estos últimos años.

y en la topología de los grupos de Lie. Por su parte, Coxeter [*70* g], vuelve a estudiar la transformación C, producto de reflexiones fundamentales de un grupo finito W engendrado por reflexiones, y constata (mediante un examen por separado de cada uno de los tipos) que el álgebra de los polinomios invariantes por W está engendrada por elementos algebraicamente independientes cuyos grados están ligados de manera sencilla con los valores propios de C. Las demostraciones *a priori* de estos resultados fueron dadas a continuación por Chevalley [*62* f], para el primero, y por Coleman [*68*] y Steinberg [*292*] para el segundo.

Con el trabajo de A. Borel sobre los grupos algebraicos lineales [*30*] da comienzo una serie de nuevos progresos de la teoría de los grupos de Lie que deberían contribuir considerablemente a su expansión. A Borel pone de manifiesto la importancia de los subgrupos resolubles conexos maximales (que se llamarán después «subgrupos de Borel») en un grupo de Lie, haciendo de ellos la herramienta principal de la transposición de una gran parte de la teoría clásica a los grupos algebraicos sobre un cuerpo algebraicamente cerrado (aun sin llegar todavía a obtener una clasificación de los grupos algebraicos simples [2]). Los subgrupos de Borel habían hecho ya su aparición algunos años antes (en el caso de los grupos clásicos reales o complejos) en los trabajos de Gelfand y Neumark sobre las representaciones de dimensión infinita, y F. Bruhat había descubierto en 1954 el hecho notable de que, para los grupos simples clásicos, la descomposición del grupo en clases dobles según un grupo de Borel puede «indexarse» de manera canónica mediante el grupo de Weyl [*40*]. Dicho resultado fue extendido a continuación a todos los grupos semisimples reales y complejos por Harich-Chandra [*149* b]. Por otra parte, Chevalley [*62* g], había conseguido asociar (en 1955) a toda álgebra de Lie semisimple compleja $\mathfrak{g}$ y a *todo* cuerpo conmutativo k, un grupo de matrices con coeficientes en k en el que

[2] Se dice que un grupo algebraico de dimensión > 0 es *simple* (en el sentido de la geometría algebraica) si no contiene ningún subgrupo algebraico distinguido de dimensión > 0 distinto de sí mismo. Se dice que es *semisimple* si es isógeno a un producto de grupos simples no conmutativos.

existía una descomposición de Bruhat, y utilizó esto último para demostrar que, salvo un pequeño número de excepciones, el grupo definido de este modo era *simple* (en el sentido de la teoría de los grupos abstractos). Esto le permitía «explicar» la coincidencia, ya observada desde Jordan y Lie, entre los grupos de Lie simples (en el sentido de la teoría de los grupos de Lie) de los tipos A, B, C y D, y los grupos simples clásicos definidos de manera puramente algebraica sobre un cuerpo cualquiera (coincidencia que hasta entonces solamente había sido extendida a los tipos excepcionales G_2 y E_6 por Dickson [*88* c y d]). En particular, si se consideraba un cuerpo *finito* k, la construcción de Chevalley daba, para cada uno de los tipos de álgebra de Lie simple compleja, una familia de grupos simples *finitos*, que contenía gran parte de los grupos simples finitos conocidos hasta entonces, así como tres nuevas series (que correspondían a los tipos de álgebras de Lie simples F_4, E_7 y E_8). Un poco después, una serie de autores (Hertzig, Suzuki, Ree, Steinberg y Tits), empleando diversos procedimientos basados en modificaciones de los métodos de Chevalley, mostraron que resulta posible obtener de un modo análogo los demás grupos simples conocidos entonces, con la excepción de los grupos alternados y los grupos de Mathieu, construyendo además otras series de nuevos grupos simples finitos (cf. [*54*]).

Casi simultáneamente, Chevalley [*62* h], utilizando una vez más la técnica de las descomposiciones de Bruhat, junto con un resultado fundamental sobre el normalizador de un subgrupo de Borel, vuelve a estudiar los grupos algebraicos lineales, llegando al resultado de que sobre un cuerpo *algebraicamente cerrado* k de característica *cualquiera*, la teoría de los grupos algebraicos lineales semisimples [3] da lugar esencialmente a los mismos tipos de la clasificación de Killing-Cartan para $k = \mathbf{C}$. A continuación, J. Tits [*308* a y b], mediante un análisis de los métodos de Chevalley, obtiene una versión axiomatizada (los «BN-pares») de las descomposiciones de Bruhat en una forma enormemente flexible, en la que interviene únicamente la estructura de grupo (esta noción recibe ahora el

[3] La existencia de numerosas álgebras de Lie simples «patológicas» sobre un cuerpo de característica $p > 0$ habría podido hacer dudar a algunos de la universalidad de la clasificación de Killing-Cartan.

nombre de «sistema de Tits»). Todos los grupos simples (en los distintos sentidos de la palabra) de que nos hemos ocupado más arriba pueden dotarse de modo canónico de sistemas de Tits, y el propio Tits ha demostrado [*308* c] que la existencia de un sistema de este tipo en un grupo abstracto G, junto con algunas propiedades suplementarias que no desbordan el marco de la teoría de grupos, permite demostrar que G es *simple*, teorema que contiene la mayor parte de los resultados de simplicidad dados hasta entonces para estos grupos. Además, Tits ha generalizado, en colaboración con A. Borel, los resultados obtenidos en [*62* h] por Chevalley, mostrando la existencia de sistemas de Tits en el grupo de puntos racionales de un grupo algebraico lineal semisimple sobre un cuerpo *cualquiera* [*31*].

Todos los sistemas de Tits que encontramos en estas cuestiones poseen un grupo de Weyl finito. Otra categoría de ejemplos ha sido descubierta por Iwahori y Matsumoto [*170*], mostrando que, si en la construcción de Chevalley de [*62* g] k es un cuerpo p-ádico, el grupo obtenido posee un sistema de Tits cuyo grupo de Weyl es el grupo de Weyl afín del álgebra de Lie semisimple compleja de partida. Este resultado acaba de ser extendido por Bruhat y Tits [*41*] a todos los grupos algebraicos semisimples sobre un cuerpo local.

BIBLIOGRAFIA

[*1*] N. H. Abel, *Œuvres*, 2 vol., ed. Sylow y Lie, Christiana, 1881.

[*2* a] I. Ado, Note sur la représentation des groupes finis et continus au moyen de substitutions linéaires (en ruso), *Bull. Phys. Math. Soc. Kazan*, t. VII (1935), pp. 3-43.

[*2* b] I. Ado, La représentation des algèbres de Lie par des matrices (en ruso), *Uspehi Mat. Nauk.*, t. II (1947), p. 159-173 (trad. inglesa: *Amer. Math. Soc. Transl.* (1), vol. 9, pp. 308-327).

[*3*] A. D. Alexandroff, Additive set functions in abstract spaces, *Mat. Sbornik:* I (cap. 1), t. VIII (1940), pp. 307-348; II (cap. 2 y 3), t. IX (1941), pp. 563-628; III (caps. 4-6), t. XIII (1943), pp. 169-238.

[*4*] P. Alexandroff-H. Hopf, *Topologie I*, Berlin (Springer), 1935.

[*5* a] *Archimedis Opera quae quidem exstant omnia, nunc primus et gr. et lat. edita...*, Basilae, Jo. Hervagius, 1 vol. in-fol., 1544.

[*5* b] *Archimedis Opera Omnia*, 3 vol., ed. J. L. Heiberg, 2.ª ed., Leipzig (Teubner), 1913-15.

[*5* c] *Les Œuvres complètes d'Archimède, trad.* P. Ver Eecke, Paris-Bruxelles (Desclée-de Brouwer), 1921.

[*6*] *The works of Aristotle*, translated under the editorship of W. D. Ross Oxford, 1928 sqq.

[*7* a] E. Artin, *Galois theory...*, Notre-Dame, 1946.

[*7* b] E. Artin, Ueber die Zerlegung definiter Funktionen in Quadraten, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, t. V (1927), pp. 100-115.

[*7* c] E. Artin, Zur Theorie der hypercomplexen Zahlen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, t. V (1927), pp. 251-260.

[*7* d] E. Artin, *Einführung in die Theorie der Gammafunktion*, Leipzig (Teubner), 1931.

[*8 a*] E. ARTIN y O. SCHREIER, Algebraische Konstruktion reeller Körper, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, t. V (1927), pp. 85-99.

[*8 b*] E. ARTIN y O. SCHREIER, Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper, *Abh. Math. Sem. Univ. Hambourg*, t. V (1927), pp. 225-231.

[*9 a*] C. ARZELÀ, Sulla integrabilità di una serie de funzioni, *Rendic. Acc. dei Lincei* (4), t. I (1885), pp. 321-326.

[*9 b*] C. ARZELÀ, Sulla integrazione per serie, *Rendic. Acc. dei Lincei* (4), t. I (1885), pp. 532-537 y 566-569.

[*10*] G. ASCOLI, Le curve limiti di una varietà data di curve, *Mem. Acc. dei Lincei* (3), t. XVIII (1883), pp. 521-586.

[*11 a*] R. BAIRE, *Leçons sur les fonctions discontinues*, Paris (Gauthier-Villars), 1905.

[*11 b*] R. BAIRE, Sur les fonctions de variables réelles, *Ann. di Mat.* (3), t. III (1899), pp. 1-123.

[*12*] R. BAIRE, E. BOREL, J. HADAMARD, H. LEBESGUE, Cinq lettres sur la théorie des ensembles, *Bull. Soc. Math. de France*, t. XXXIII (1905) pp. 261-273.

[*13*] H. F. BAKER, Alternants and continuous groups, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), t. III (1905), pp. 24-47.

[*14 a*] S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*, Varsovia, 1932.

[*14 b*] S. BANACH, Sur le problème de la mesure, *Fund. Math.*, t. IV (1923), pp. 7-33.

[*14 c*] S. BANACH, Sur les fonctionnelles linéaires, *Studia Math.*, t. I (1929), pp. 211-216 y 223-239.

[*15*] S. BANACH y H. STEINHAUS, Sur le principe de condensation des singularités, *Fund. Math.*, t. IX (1927), pp. 50-61.

[*16 a*] I. BARROW, *Lectiones Geometricae...*, Londini, 1670.

[*16 b*] I. BARROW, *Mathematical Works*, ed. W. Whewell, Cambridge, 1860.

[*17 a*] O. BECKER, Eudoxos-Studien, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mah.*, Abt. B: Studien, t. II (1933), pp. 311-333 y 369-387, y t. III (1936), pp. 236-244 y 370-388.

[*17 b*] O. BECKER, Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im Neunten Buch der Euklidischen Elementen, *Quellen und Studien zur Geschichte der Math.*, Abt. B: Studien, t. III (1936), pp. 533-553.

[*18 a*] E. BELTRAMI, Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea, *Giorn. di Mat.*, t. VI (1868), pp. 284-312.

[*18 b*] E. BELTRAMI, Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante, *Ann. di Mat.* (2), t. II (1868-69), pp. 232-255.

[*19 a*] JAKOB BERNOULLI, *Opera*, 2 vol., Genève (Cramer-Philibert), 1744.

[*19 b*] JAKOB BERNOULLI, *Ars Conjectandi*, Bâle, 1713 (trad. S. Vastel, Paris, 1801).

[*20 a*] JOHANN BERNOULLI, *Opera Omnia*, 4 vol., Lausanne-Genève (M. M. Bousquet), 1742.

[*20 b*] JOHANN BERNOULLI, *Die erste Integralrechnung* (*Ostwald's Klassiker*, núm. 194), Leipzig-Berlin (Engelmann), 1914.

[*20 c*] JOHANN BERNOULLI, *Die Differentialrechnung* (*Ostwald's Klassiker*, núm. 211), Leipzig (Akad. Verlag), 1924.

[*21*] E. BEZOUT, *Théorie générale des équations algébriques*, Paris, 1779.

[*22 a*] G. BIRKHOFF, Continuous groups and linear spaces, *Rec. Math. Moscou*, t. I (1936), pp. 635-642.

[*22 b*] G. BIRKHOFF, Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices, *Ann. of Math.*, t. XXXVIII (1937), pp. 526-532.

[*23*] J. M. BOCHENSKI, *Ancient formal logic*, Studies in Logic, Amsterdam (North Holland Publ. Co.), 1951.

[*24 a*] S. BOCHNER, Integration von Funktionen deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind, *Fund. Math.*, t. XX (1933), 262-276.

[*24 b*] S. BOCHNER, *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*, Berkeley (Univ. of California Press), 1960.

[*25*] P. BÖHNER, *Medieval logic, an outline of its development from 1250 to ca. 1400*, Chicago, 1952.

[*26*] H. BOHR y J. MOLLERUP, *Laerebog i matematisk Analyse*, t. III Kopenhagen, 1922.

[*27 a*] B. BOLZANO, *Œuvres*, 5 vol., Prague, 1930-1948.

[*27 b*] B. BOLZANO, *Paradoxien des Unendlichen*, Leipzig, 1851 (trad. anglaise, New Haven (Yale Univ. Press), 1950).

[*27 c*] B. BOLZANO, *Rein Analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewahren, wenigstens eine reelle Wurzel liegt* (*Ostwald's Klassiker*, núm. 153), Leipzig, 1905.

[*28 a*] R. BOMBELLI, *L'Algebra*, Bologna (G. Rossi), 1579.

[*28 b*] R. BOMBELLI, *L'Algebra*, libri IV e V, éd. E. Bortolotti, Bologna (Zanichelli), 1929.

[*29*] G. BOOLE, *Collected logical works*, 2 vol., éd. P. Jourdain, Chicago-London, 1916.

[*30*] A. BOREL, Groupes linéaires algébriques, *Ann. of Math.*, t. LXIV (1956), pp. 20-80.

[*31*] A. BOREL y J. TITS, Groupes réductifs, *Publ. math. I. H. E. S.*, núm. 27 (1965), pp. 55-150.

[*32 a*] E. BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris (Gauthier-Villars), 1898.

[*32 b*] E. BOREL, Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. XXVII (1909), pp. 286-310.

[*33*] H. BOSMANS, Sur le «libro del Algebra» de Pedro Núñez, *Bibl. Math.* (3), t. VIII (1907-08), pp. 154-169.

[*34 a*] R. BRAUER, Über Systeme hypercomplexer Zahlen, *Math. Zeitschr.*, t. XXX (1929), pp. 79-107.

[*34 b*] R. BRAUER, Eine Bedingung für vollständige Reduzibilität von Darstellungen gewöhnlicher und infinitesimaler Gruppen, *Math. Zeitschr.*, t. XLI (1936), pp. 330-339.

[*35*] A. BRAVAIS, Mémoires sur les polyèdres de forme symétrique, *Journ. de Math.* (1), t. XIV (1849), pp. 141-180.

[*36*] H. BRIGGS, *Arithmetica logarithmica*, London, 1624.

[37] A. BRILL y M. NOETHER, Ueber algebraische Funktionen, *Math. Ann.*, t. VII (1874), pp. 269-310.

[38] Lord BROUNCKER, The Squaring of the Hyperbola by an infinite series of Rational Numbers..., *Phil. Trans.*, t. III (1668), pp. 645-649.

[39 a] L. E. J. BROUWER, Intuitionism and formalism, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. XX (1913), pp. 81-96.

[39 b] L. E. J. BROUWER, Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik, *Math. Ann.*, t. XCIII (1925), pp. 244-257, t. XCV (1926), pp. 453-473, t. XCVI (1926), pp. 451-458.

[40] F. BRUHAT, Représentations induites des groupes de Lie semi-simples complexes, *C. R. Acad. Sci.*, t. CCXXXVIII (1954), pp. 437-439.

[41] F. BRUHAT y J. TITS, Groupes algébriques simples sur un corps local, *Proc. Conf. on Local Fields*, pp. 23-36, Berlin (Springer), 1967.

[42] C. BURALI-FORTI, Sopra un teorema del Sig. G. Cantor, *Atti Acad. Torino*, t. XXXII (1896-97), pp. 229-237.

[43] H. BURKHARDT, Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini, *Zeitschr. für Math. und Phys.*, t. XXXVII (1892), Suppl., pp. 121-159.

[44 a] W. BURNSIDE, On the condition of reducibility for any group of linear substitutions, *Proc. Lond. Math. Soc.*, t. III (1905), pp. 430-434.

[44 b] W. BURNSIDE, *Theory of groups of finite order*, 2.ª ed., Cambridge (University Press), 1911.

[45] W. H. BUSSEY, The origin of mathematical induction, *Amer. Math. Monthly*, t. XXIV (1917), pp. 199-207.

[46 a] J. E. CAMPBELL, On a law of combination of operators bearing on the theory of continuous transformation groups, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (1), t. XXVIII (1897), pp. 381-390.

[46 b] J. E. CAMPBELL, On a law of combination of operators (second paper), *Proc. Lond. Math. Soc.* (1), t. XXIX (1898), pp. 14-32.

[47] G. CANTOR, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin (Springer), 1932.

[48] G. CANTOR, R. DEDEKIND, *Briefwechsel*, éd. J. Cavaillès-E. Noether, *Actual. Scient. et Ind.*, núm. 518, Paris (Hermann), 1937.

[49] C. CARATHEODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig-Berlin (Teubner), 1918.

[50] H. CARDANO, *Opera*, 10 vol., Lyon, 1663.

[51] L. CARNOT, *Géométrie de Position*, Paris, 1803.

[52 a] E. CARTAN, *Œuvres complètes*, 6 vol. (3 partes), París (Gauthier-Villars), 1953-55.

[52 b] E. CARTAN, *Leçons sur la théorie des spineurs* (*Actual. Scient. et Ind.*, núms. 643 y 701), Paris (Hermann), 1938.

[53] H. CARTAN, Théorie des filtres, *C. R. Acad. Sci.*, t. CCV (1937), pp. 595-598; Filtres et ultrafiltres, *ibid.*, pp. 777-779.

[54] R. CARTER, Simple groups and simple Lie algebras, *Journ. Lond. Math. Soc.*, t. XL (1965), pp. 193-240.

[55] H. CASIMIR y B. L. VAN DER WAERDEN, Algebraischer Beweis der vollständigen Reduzibilität der Darstellungen halbeinfacher Liescher Gruppen, *Math. Ann.*, t. CXI (1935), pp. 1-12.

[56 a] A.-L. CAUCHY, *Œuvres complètes*, 26 vol. (2 series), París (Gauthier-Villars), 1882-1958.

[56 b] *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, rédigées principalement d'après les méthodes de M. A.-L. Cauchy*, par l'Abbé Moigno, t. II, Paris, 1844.

[57 a] B. CAVALIERI, *Geometria indivisibilibus continuorum quadam ratione promota*, Bononiae, 1635 (2.ª ed., 1653).

[57 b] B. CAVALIERI, *Exercitationes geometricae sex*, Bononiae, 1647.

[58] A. CAYLEY, *Collected Mathematical Papers*, 13 vol., Cambridge (University Press), 1889-1898.

[59] L. CESARI, *Surface area*, Princeton, 1954.

[60 a] M. CHASLES, Note sur les propriétés générales du systéme de deux corps, *Bull. de Férussac*, t. XIV (1830), pp. 321-326.

[60 b] M. CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Bruxelles, 1837.

[61] C. CHABAUTY, Sur les points rationnels des courbes algébriques de genre supérieur à l'unité, *C. R. Acad. Sci.*, t. CCXII (1941), pp. 882-884.

[62 a] C. CHEVALLEY, *The algebraic theory of spinors*, New-York (Columbia University Press), 1954.

[62 b] C. CHEVALLEY, Généralisation de la théorie du corps de classes pour les extensions infinies, *Journ. de Math.* (9), t. XV (1936), pp. 359-371.

[62 c] C. CHEVALLEY, On the theory of local rings, *Ann. of Math.*, t. XLIV (1943), pp. 690-708.

[62 d] C. CHEVALLEY, *Theory of Lie groups*, Princeton (University Press), 1946.

[62 e] C. CHEVALLEY, Sur la classification des algèbres de Lie simples et de leurs représentations, *C. R. Acad. Sci.*, t. CCXXVII (1948), pp. 1136-1138.

[62 f] C. CHEVALLEY, Invariants of finite groups generated by reflections, *Amer. Journ. of Math.*, t. LXXVII (1955), pp. 778-782.

[62 g] C. CHEVALLEY, Sur certains groupes simples, *Tohôku Math. Journ.*, (2), t. VII (1955), pp. 14-66.

[62 h] C. CHEVALLEY, *Classification des groupes de Lie algébriques*, 2 vol., Paris (Inst. H. Poincaré), 1956-58.

[63] G. CHOQUET, Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier*, t. V (1953-54), pp. 131-295.

[64] N. CHUQUET, Le Triparty en la Science des Nombres, éd. A. Marre, *Bull. bibl. storia math.*, t. XIII (1880), pp. 555-659 y 693-814.

[65] W. K. CLIFFORD, *Mathematical Papers*, London (Macmillan), 1882.

[66] I. COHEN y A. SEIDENBERG, Prime ideals and integral dependence, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. LII (1946), pp.252-261.

[67] P. J. COHEN, The independence of the continuum hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, t. L (1963), pp. 1143-1148 y t. LI (1964), pp. 105-110.

[68] A. J. COLEMAN, The Betti numbers of the simple groups, *Can. Journ. of Math.*, t. X (1958), pp. 349-356.

[69 a] L. COUTURAT, *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*, Paris (Alcan), 1901.
[69 b] L. COUTURAT, La Philosophie des mathématiques de Kant, *Revue de Métaph. et de Morale*, t. XII (1904), pp. 321-383.
[70 a] H. S. M. COXETER, Groups whose fundamental regions are simplexes, *Journ. Lond. Math. Soc.*, t. VI (1931), p. 132-136.
[70 b] H. S. M. COXETER, The polytopes with regular prismatic figures, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), t. XXXIV (1932), pp. 126-189.
[70 c] H. S. M. COXETER, Discrete groups generated by reflections, *Ann. of Math.*, t. XXXV (1934), pp. 588-621.
[70 d] H. S. M. COXETER, The complete enumeration of finite groups of the form $R_i^2 = (R_i . R_j)^{k_{ij}} = 1$, *Journ. Lond. Math. Soc.*, t. X (1935), pp. 21-25.
[70 e] H. S. M. COXETER *in* H. WEYL, *The structure and representation of continuous groups* (Inst. for Adv. Study, notas mimeografiadas por N. Jacobson y R. Brauer, 1934-35): *Appendix*.
[70 f] H. S. M. COXETER, *Regular polytopes*, New York (Macmillan), 1948 (2.ª ed., 1963).
[70 g] H. S. M. COXETER, The product of generators of a finite group generated by reflections, *Duke Math. Journ.*, t. XVIII (1951), pp. 765-782.
[71] H. S. M. COXETER y W. O. J. MOSER, *Generators and relations for discrete groups*, *Ergeb. der Math.*, Neue Folge, Bd. 14, Berlin (Springer), 1957 (2.ª ed., 1965).
[72] G. CRAMER, *Introduction à l'analyse de lignes courbes*, Genève (Cramer et Philibert), 1750.
[73] H. CURRY, *Outlines of a formalist philosophy of mathematics*, Amsterdam (North Holland Publ. Co.), 1951.
[74] M. CURTZE, Über die Handschrift «Algorismes proportionum magistri Nicolay Orem», *Zeitschr. für Math. und Phys.*, t. XIII, Supplem. (1868), pp. 65-79 y pp. 101-104.
[75 a] J. d'ALEMBERT, *Encyclopédie*, Paris, 1751-1765.
[75 b] J. d'ALEMBERT, Sur les principes métaphysiques du Calcul infinitésimal, *Mélanges de litt., d'hist. et de philosophie*, nueva ed., t. V, Amsterdam (1768), pp. 207-219.
[75 c] J. d'ALEMBERT, *Misc. Taur.*, t. III (1762-65), p. 381.
[76 a] P. J. DANIELL, A general from of integral, *Ann. of Math.* (2), t. XIX (1918), pp. 279-294.
[76 b] P. J. DANIELL, Integrals in an infinite number of dimensions, *Ann. of Math.* (2), t. XX (1919), pp. 281-288.
[76 c] P. J. DANIELL, Stieltjes-Volterra products, *Congr. Intern. des Math.*, Strasbourg, 1920, pp. 130-136.
[76 d] P. J. DANIELL, Functions of limited variation in an infinite number of dimensions *Ann. of Math.* (2) t. XXI (1919-20) pp. 30-38.
[77] G. DARBOUX, Mémoire sur les fonctions discontinues, *Ann. Ec. Norm. Sup.* (2), t. IV (1875), pp. 57-112.
[78] B. DATTA y A. N. SINGH, *History of Hindu Mathematics*, 2 vol., Lahore (Motilal Banarsi Das), 1935-38.

[79] R. DEDEKIND, *Gesammelte mathematische Werke*, 3 vol., Braunschweig (Vieweg), 1932.
[80] R. DEDEKIND y H. WEBER, Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, *J. de Crelle*, t. XCII (1882), pp. 181-290.
[81] M. DEHN, Über den Rauminhalt, *Math. Ann.*, t. LV (1902), páginas 465-478.
[82] Ch. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensembles, Classes de Baire*, Paris (Gauthier-Villars), 1916 (2.ª ed., 1936).
[83 a] A. DE MORGAN, On the syllogism (III), *Trans. Camb. Phil. Soc.*, t. X (1858), pp. 173-230.
[83 b] A. DE MORGAN, On the syllogism (IV) and on the logic of relations, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, t. X (1860), pp. 331-358.
[84] G. DESARGUES, *Œuvres*, ed. Pourra, t. I, Paris (Leiber), 1864.
[85 a] R. DESCARTES, *Œuvres*, ed. Ch. Adam y P. Tannery, 13 vol., Paris (L. Cerf), 1897-1913.
[85 b] R. DESCARTES, *Geometria*, trad. latina de Fr. van Schooten, 2.ª ed., 2 vol., Amsterdam (Elzevir), 1659-61.
[86] J. A. DE SÉGUIER, *Théorie de groupes finis. Éléments de la théorie des groupes abstraits*, Paris (Gauthier-Villars), 1904.
[87] M. DEURING, *Algebren* (*Erg. der Math.*, Bd. 4), Berlin (Springer), 1937.
[88 a] L. E. DICKSON, Linear associative algebras and abelian equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. XV (1914), pp. 31-46.
[88 b] L. E. DICKSON, Theory of linear groups in an arbitrary field, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. II (1901), pp. 363-394.
[88 c] L. E. DICKSON, A new system of simple groups, *Math. Ann.*, t. LX (1905), pp. 137-150.
[88 d] L. E. DICKSON, A class of groups in an arbitrary realm connected with the configuration of the 27 lines on a cubic surface, *Quart. Journ. Pure and App. Math.*, t. XXXIII (1901), pp. 145-173 y t. XXXIX (1908), pp. 205-209.
[89] H. DIELS, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, 2.. Aufl., 2 vol., Berlin (Weidmann), 1906-07.
[90 a] J. DIEUDONNÉ, Une généralisation des espaces compacts, *Journ. de Math.* (9), t. XXIII (1944), pp. 65-76.
[90 b] J. DIEUDONNÉ, *La géométrie des groupes classiques* (*Erg. der Math.*, Neue Folge, Heft 5), Berlin-Göttingen-Heidelberg (Springer), 1955.
[91 a] *Diophanti Alexandrini Opera Omnia...*, 2 vol., ed. P. Tannery, Lipsiae (Teubner), 1893-95.
[91 b] *Diophante d'Alexandrie*, trad. P. Ver Eecke, Bruges (Desclée-de Brouwer), 1926.
[92 a] P. G. LEJEUNE-DIRICHLET, *Werke*, 2 vol., Berlin (Reimer), 1889-1897.
[93] J. L. DOOB, Probability in function space, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. LIII (1947), pp. 15-30.
[94 a] P. DU BOIS-REYMOND, Sur la grandeur relative des infinis des fonctions, *Ann. di Mat.* (2), t. IV (1871), pp. 338-353.
[94 b] P. DU BOIS-REYMOND, Ueber asymptotische Werthe, infinitäre Approxi-

mationen und infinitäre Auflösung von Gleichungen, *Math. Ann.*, t. VIII (1875), pp. 362-414.

[95] N. Dunford, Uniformity in linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. XLIV (1938), pp. 305-356.

[96] N. Dunford y B. Pettis, Linear Operations on summable functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. XLVII (1940), pp. 323-392.

[97] W. Dyck, Gruppentheoretische Studien, *Math. Ann.*, t. XX (1882), pp. 1-44.

[98 a] E. Dynkin, Calcul des coefficients de la formule de Campbell-Hausdorff (en ruso), *Dokl. Akad. Nauk.*, t. LVII (1947), pp. 323-326.

[98 b] E. Dynkin, Algèbres de Lie normées et groupes analytiques (en ruso), *Uspehi Mat. Nauk*, t. V (1950), pp. 135-186 (trad. inglesa: *Amer. Math. Soc. Transl.* (1), vol. 9, pp. 470-534).

[99] D. Egoroff, Sur les suites de fonctions mesurables, *C. R. Acad. Sci.*, t. CLII (1911), pp. 244-246.

[100] M. Eichler, *Quadratische Formen und orthogonale Gruppen*, Berlin-Göttingen-Heidelberg (Springer), 1952.

[101] A. Einstein, *Investigations on the theory of the Brownian movement*, New York (Dover), 1956.

[102 a] G. Eisenstein, Beweis der Reciprocitätsgesetze für die cubischen Reste in der Theorie der aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzen Zahlen, *J. de Crelle*, t. XXVII (1844), pp.289-310.

[102 b] G. Eisenstein, Zur Theorie der quadratischen Zerfällung der Primzahlen $8n + 3$, $7n + 2$ und $7n + 4$, *J. de Crelle*, t. XXXVII (1848), pp. 97-126.

[102 c] G. Eisenstein, Über einige allgemeine Eigenschaften der Gleichung von welcher die Teilung der ganzen Lemniscate abhängt, nebst Anwendungen derselben auf die Zahlentheorie, *J. de Crelle*, t. XXXIX (1850), pp. 160-179 y 224-287.

[103] G. Eneström, Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage von Cantors Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik, *Bibl. Math.* (3), t. VIII (1907), pp. 412-413.

[104 a] F. Engel, Über die Definitionsgleichung der continuierliche Transformationsgruppen, *Math. Ann.*, t. XXVII (1886), pp. 1-57.

[104 b] F. engel, Die Erzeugung der endlichen Transformationen einer projektiven Gruppe durch die infinitesimalen Transformationen der Gruppe, I, *Leipziger Ber.*, t. XLIV (1892), pp. 279-296; II (mit Beiträgen von E. Study), *ibid.*, t. XLV (1893), pp. 659-696.

[105 a] F. Engel y P. Stäckel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, Leipzig (Teubner), 1895.

[105 b] F. Engel y P. Stäckel, *Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrien*, 2 vol., Leipzig (Teubner), 1898-1913.

[106] *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, 1.. Aufl., 20 vol., Leipzig (Teubner), 1901-1935.

[107] *Euclidis Elementa*, 5 vol., ed. J. L. Heiberg, Lipsiae (Teubner), 1883-88.

[108 a] L. Euler, *Opera Omnia*, 46 vol. parus (3 series), Leipzig-Berlin-Zürich (Teubner y O. Füssli), 1911-1957.

[108 b] L. Euler, Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum, *Novi Comm. Acad. Sc. imp. Petrop.*, t. XX (1776), pp. 189-207.

[109] P. Fermat, *Œuvres*, 5 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1891-1922.

[110] X. Fernique, Processus linéaires, processus généralisés, *Ann. Inst. Fourier*, t. XVII (1967), pp. 1-92.

[111] E. Fischer, Sur la convergence en moyenne, *C. R. Acad. Sci.*, t. CXLIV (1907), pp. 1022-1024.

[112] J. B. Fourier, *Œuvres*, 2 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1888-90.

[113 a] A. Fraenkel, Über die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen, *J. de Crelle*, t. CXLV (1914), pp. 139-176.

[113 b] A. Fraenkel, Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre, *Math. Ann.*, t. LXXXVI (1922), pp.230-237.

[113 c] A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre*, 3.. Aufl., Berlin (Springer), 1928.

[114] D. C. Fraser, Newton's Interpolation Formulas, *Journ. Inst. Actuaries*, t. LI (1918), pp. 77-106 y pp. 211-232 y t. LVIII (1927), pp. 53-95 (artículos reimpresos en un folleto, Londres, s.d.).

[115 a] M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. XXII (1906), pp. 1-74.

[115 b] M. Fréchet, Les ensembles abstraits et le Calcul fonctionnel, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. XXX (1910), pp. 1-26.

[115 c] M. Fréchet, Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait, *Bull. Soc. Math. de France*, t. XLIII (1915), pp. 248-265.

[115 d] M. Fréchet, Les familles et fonctions additives d'ensembles abstraits, *Fund. Math.*, t. IV (1923), pp. 229-265 y t. V (1924), pp. 206-251.

[116] I. Fredholm, Sur une classe d'équations fonctionnelles, *Acta Mathematica*, t. XXVII (1903), pp. 365-390.

[117 a] G. Frege, *Begriffschrift eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle, 1879.

[117 b] G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*, 2nd ed. with an English translation by J. L. Austin, New-York, 1950.

[117 c] G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik, begriffschriftlich abgeleitet*, 2 vol., Jna, 1893-1903.

[118] R. Fricke y F. Klein, *Theorie der automorphen Funktionen*, Leipzig (Teubner), 1897.

[119] G. Frobenius, *Gesammelte Abhandlungen* (ed. J. P. Serre), 3 vol., Berlin-Heidelberg-New York (Springer), 1968.

[120] G. Frobenius y L. Stickelberger, Ueber Gruppen von vertauschbaren Elementen, *J. de Crelle*, t. LXXXVI (1879), pp. 217-262.

[121] G. Fubini, Sugli integrali multipli, *Rendic. Acc. dei Lincei* (5), t. XVI (1907), pp. 608-614.

[122 a] Galileo Galilei, *Discorsi e Dimostrazioni...*, Leiden (Elzevir), 1638.

[122 b] Galileo Galilei, *Opere*, Ristampa della Ed. Nazionale, 20 vol., Firenze (Barbera), 1929-39.

[123] E. Galois, *Écrits et mémoires mathématiques* (ed. R. Bourgne y J. Y. Azra), Paris (Gauthier-Villars), 1962.

[*124* a] C. F. GAUSS, *Werke*, 12 vol., Göttingen, 1870-1927.

[*124* b] *Die vier Gauss'schen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Functionen in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades* (*Ostwald's Klassiker*, núm. 14), *Leipzig* (Teubner), 1904.

[*125* a] I. GELFAND, Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren, *Mat. sborn.* (N. S.), t. IV (1938), pp. 235-284.

[*125* b] I. GELFAND, Processus stochastiques généralisés (en ruso), *Dokl. Akad. Nauk*, t. C (1955), pp. 853-856.

[*125* c] I. GELFAND, Some problems of functional analysis (en ruso), *Uspehi Mat. Nauk*, t. XI (1956), pp. 3-12 (trad. inglesa: *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), vol. 16 (1960), pp. 315-324).

[*126*] I. GELFAND y N. Ya. VILENKIN, *Generalized functions*, vol. IV, New York (Academic Press), 1964.

[*127*] G. GENTZEN, *Die gegenwartige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung. Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie* (*Forschungen zur Logik*..., Heft 4, Leipzig (Hirzel), 1938).

[*128*] GIORGINI, Sopra alcune proprietà de' piani de' momenti..., *Mem. Soc. Ital. d. Sc. res. in Modena*, t. XX (1828), pp. 243-254.

[*129*] A. GIRARD, *Invention nouvelle en Algèbre*, Amsterdam, 1629 (reimp. ed. Bierens de Haan, Leyde, 1884).

[*130* a] K. GÖDEL, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, *Monatsh. für Math. und Phys.*, t. XXXVIII (1931), pp. 173-198.

[*130* b] K. GÖDEL, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis* (*Ann. of Math. Studies*, núm. 3), Princeton, 1940.

[*130* c] K. GÖDEL, What is Cantor's continuum hypothesis? *Amer. Math. Monthly*, t. LIV (1947), pp. 515-525.

[*131*] D. GORENSTEIN, *Finite groups*, New York (Harper and Row), 1968.

[*132*] E. GOURSAT, Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace, *Ann. Ec. Norm. Sup.* (3), t. VI (1889), pp. 9-102.

[*133*] J. P. GRAM, Ueber die Entwickelung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate, *J. de Crelle*, t. XCIV (1883), pp. 41-73.

[*134*] H. GRASSMANN, *Gesammelte Werke*, 3 vol., Leipzig (Teubner), 1894-1911.

[*135*] P. GREGORII A SANCTO VICENTIO, *Opus Geometricum Quadraturae Circuli et Sectionum Coni*..., 2 vol., Antverpiae, 1647.

[*136* a] J. GREGORY, *Vera Circuli et Hyperbolae Quadraturae*..., Pataviae, 1667.

[*136* b] J. GREGORY, *Geometriae Pars Universalis*, Pataviae, 1668.

[*136* c] J. GREGORY, *Exercitationes Geometricae*, London, 1668.

[*136* d] *James Gregory Tercentenary Memorial Volume, containing his correspondence with John Collins and his hitherto unpublished mathematical manuscripts*..., ed. H. W. Turnbull, London (Bell and sons), 1939.

[*137*] H. GRELL, Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe, *Math. Ann.*, t. XCVII (1927), pp. 490-523.

[*138*] A. GROTHENDIECK, Éléments de géométrie algébrique, I, *Publ. math. I. H. E. S.*, núm. 4 (1960).

[*139*] A. HAAR, Der Maassbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, *Ann. of Math.*, t. XXXIV (1933), pp. 147-169.

[*140*] J. HACHETTE y S. POISSON, Addition au mémoire précédent, *Journ. de l'Ec. Polytechn.*, cahier 11 (an X), pp. 170-172.

[*141*] J. HADAMARD, Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles, *Verhandl. Intern. Math. Kongress*, Zürich, 1898, pp. 201-202.

[*142*] H. HAHN, Ueber lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen *J. de Crelle* t. CLVII (1927), pp. 214-229.

[*143*] M. HALL, A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. I (1950), pp. 575-581.

[*144*] P. HALL, A contribution to the theory of groups of prime power order, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), t. IV (1932), pp. 29-95.

[*145* a] W. R. HAMILTON, *Lectures on quaternions*, Dublin, 1853.

[*145* b] W. R. HAMILTON, Memorandum respecting a new system of roots of unity, *Phil. Mag.* (4), t. XII (1856), pp. 446.

[*146*] H. HANKEL, *Theorie der complexen Zahlensysteme*, Leipzig (Voss), 1867.

[*147*] G. H. HARDY, *Orders of infinity* (*Cambridge tracts*, núm. 12), 2.ª ed., Cambridge University Press, 1924.

[*148*] G. H. HARDY y E. M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford, 1938.

[*149* a] HARISH-CHANDRA, On some applications of the universal enveloping algebra of a semi-simple Lie algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. LXX (1951), pp. 28-96.

[*149* b] HARISH-CHANDRA, On a lemma of Bruhat, *Journ. de Math.* (9), t. XXXV (1956), pp. 203-210.

[*150* a] H. HASSE, Ueber die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratischen Formen im Körper der rationalen Zahlen, *J. de Crelle*, t. CLII (1923), pp. 129-148.

[*150* b] H. HASSE, Ueber die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahlen, *J. de Crelle*, t. CLII (1923), pp. 205-224.

[*150* c] H. HASSE, Kurt Hensels entscheidender Anstoss zur Entdeckung des Lokal-Global-Prinzips, *J. de Crelle*, t. CCIX (1960), pp. 3-4.

[*150* d] H. HASSE, *Zahlentheorie*, Berlin (Akad. Verlag), 1949.

[*151*] H. HASSE y H. SCHOLZ, *Die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik*, Charlottenburg (Pan-Verlag), 1928 (= *Kant-Studien*, t. XXXIII (1928), pp. 4-72).

[*152* a] F. HAUSDORFF, Die symbolische Exponentialformal in der Gruppentheorie, *Leipziger Ber.*, t. LVIII (1906), pp. 19-48.

[*152* b] F. HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig (Veit), 1914.

[*152* c] F. HAUSDORFF, *Mengenlehre*, Berlin (de Gruyter), 1927.

[*153* a] T. HEATH, *A History of Greek Mathematics*, 2 vol., Oxford, 1921.

[*153* b] T. HEATH, *Apollonius of Perga, Treatise on conic sections*, Cambridge University Press, 1896.

[*153* c] T. HEATH, *The method of Archimedes*, Cambridge, 1912.

[153 d] T. HEATH, *Mathematics in Aristotle*, Oxford (Clarendon Press), 1949.
[153 e] T. HEATH, *The thirteen books of Euclid's Elements...*, 3 vol., Cambridge, 1908.
[153 f] T. HEATH, *Diophantus of Alexandria*, 2.ª ed., Cambridge, 1910.
[154 a] E. HEINE, Ueber trigonometrische Reihen, *J. de Crelle*, t. LXXI (1870,) pp. 353-365.
[154 b] E. HEINE, Die Elemente der Functionenlehre, *J. de Crelle*, t. LXXIV (1872), pp. 172-188.
[155] G. HEINRICH, James Gregorys «Vera circuli et hyperbolae quadratura», *Bibl. Math.* (3), t. II (1901), pp. 77-85.
[156] E. HELLY, Ueber Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Monatsh. fü Math. und Phys.*, t. XXXI (1921), pp. 60-91.
[157 a] K. HENSEL, Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen, *Jahresber, de D. M. V.*, t. VI (1899), pp. 83-88.
[157 b] K. HENSEL, Ueber die Fundamentalgleichung und die ausserwesentlichen Diskriminantentheiler eines algebraischen Körpers, *Gött. Nachr.* (1897), pp. 254-260.
[157 c] K. HENSEL, Neue Grundlagen der Arithmetik, *J. de Crelle*, t. CXXVII (1902), pp. 51-84.
[157 d] K. HENSEL, Über die arithmetische Eigenschaften der algebraischen und transzendenten Zahlen, *Jahresber, der D. M. V.*, t. XIV (1905), pp. 545-558.
[157 e] K. HENSEL, Ueber die arithmetischen Eigenschaften der Zahlen, *Jahresber. der D. M. V.*, t. XVI (1907), pp. 299-319, 388-393, 474-496.
[157 f] K. HENSEL, *Theorie der algebraischen Zahlen*, Leipzig (Teubner), 1908.
[158] J. HERBRAND, Recherches sur la théorie de la démonstration, *Trav. Soc. Sci. Lett. Varsovie*, cl. II (1930), pp. 33-160.
[159] C. HERMITE, *Œuvres*, 4 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1905-1917.
[160] C. HERMITE, T. STIELTJES, *Correspondance*, 2 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1905.
[161] J. HESSEL, *Krystallometrie oder Krystallonomie und Krystallographie* (1830, repr. en *Ostwald's Klassiker*, núms. 88 y 89, Leipzig (Teubner), 1897).
[162] A. HEYTING, *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie* (*Erg. der Math.*, Bd. 3), Berlin (Springer), 1934.
[163 a] D. HILBERT, *Gesammelte Abhandlungen*, 3 vol., Berlin (Springer), 1932-35.
[163 b] D. HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen*, 2.ª ed., Leipzig-Berlin (Teubner), 1924.
[163 c] D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, 7.ª ed., Leipzig-Berlin (Teubner), 1930.
[164] D. HILBERT y W. ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik*. 3.. Aufl., Berlin (Springer), 1949.
[165] O. HÖLDER, Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen, *Math. Ann.*, t. XXXIV (1889), pp. 26-56.
[166] R. HOOKE, Linear *p*-adic groups and their Lie algebras, *Ann. of Math.*, t. XLIII (1942), pp. 641-655.

[167] C. HOPKINS, Rings with minimal conditions for left ideals, *Ann, of Math.* (2), t. XL (1939), pp. 712-730.
[168] A. HURWITZ, Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration, *Gött. Nachr.*, 1897, pp. 71-90 (= *Math. Werke*, t. II, pp. 546-564).
[169 a] *Christiani Hugenii, Zulichemii Philosophi vere magni, Dum viveret Zelemii Toparchae, Opera...*, 4 tomos en 1 vol., Lugd. Batav., 1751.
[169 b] C. HUYGENS, *Œuvres complètes*, 22 vol., La Haye (M. Nijhoff), 1888-1950.
[170] N. IWAHORI y H. MATSUMOTO, On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke ring of *p*-adic Chevalley groups, *Publ. math. I. H. E. S.*, núm. 25 (1965), pp. 5-48.
[171] C. G. J. JACOBI, *Gesammelte Werke*, 7 vol., Berlin (G. Reimer), 1881-91.
[172 a] N. JACOBSON, Rational methods in the theory of Lie algebras, *Ann. of Math.*, t. XXXVI (1935), pp. 875-881.
[172 b] N. JACOBSON, Classes of restricted Lie algebras of characteristic *p*, II, *Duke Math. Journ.*, t. X (1943), pp. 107-121.
[172 c] N. JACOBSON, A topology for the set of primitive ideals in an arbitrary rin, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, t. XXXI (1945), pp. 333-338.
[172 d] N. JACOBSON, *Structure of rings* (*Amer. Math. Soc. Coll. Public.*, t. 37), Providence, 1956.
[173] B. JESSEN, The theory of integration in a space of an infinite number of dimensions, *Acta Math.*, t. LXIII (1934), pp. 249-323.
[174 a] C. JORDAN, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, 2.ª ed., Paris (Gauthier-Villars y A. Blanchard), 1957.
[174 b] C. JORDAN, Mémoire sur les groupes de mouvements, *Ann. di Mat.*, (2), t. II (1868-69), pp. 167-215 y 322-345 (= *Œuvres*, t. IV, pp. 231-302. Paris (Gauthier-Villars 4), 1964).
[174 c] C. JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, 3.ª ed., 3 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1909-15.
[175] H. JUNG, *Algebraischen Flächen*, Hannover (Helwing), 1925.
[176] J. P. KAHANE, Séries de Fourier aléatoires, *Sém. Bourbaki*, núm. 200, 12. année, 1959-60, New York (Benjamin).
[177] S. KAKUTANI, Notes on infinite product measure spaces, II, *Proc. Imp. Acad. Japan*, t. XIX (1943), pp. 184-188.
[178] I. KANT, *Werke*, ed. E. Cassirer, 11 vol., Berlin (B. Cassirer), 1912-1921.
[179 a] J. KEPLER, *Stereometria Doliorum*, 1615.
[179 b] J. KEPLER, *Neue Stereometrie der Fäser* (*Ostwald's Klassiker*, núm. 165), Leipzig (Engelmann), 1908.
[180] W. KILLING, Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen: I) *Math. Ann.*, t. XXXI (1888), pp. 252-290; II) *ibid.*, t. XXXIII (1889), pp. 1-48; III) *ibid.*, t. XXXIV (1889), pp. 57-122; IV) *ibid.*, t. XXXVI (1890), pp. 161-189.
[181] S. KLEENE, *Introduction to metamathematics*, New York, 1952.
[182] F. KLEIN, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, 3 vol., Berlin (Springer), 1921-23.

[183] A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (*Erg. der Math.*, Bd. 2), Berlin (Springer), 1933.
[184] G. Köthe, Neubegründung der Theorie der vollkommenen Räume, *Math. Nachr.*, t. IV (1951), pp. 70-80.
[185] E. Kötter, *Die Entwickelung der synthetischen Geometrie*, Leipzig (Teubner), 1901 (= *Jahresbericht der D. M. V.*, t. V. 2... Heft).
[186 a] L. Kronecker, *Werke*, 5 vol., Leipzig (Teubner), 1895-1930.
[186 b] L. Kronecker, *Vorlesungen über die Theorie der Determinanten...*, Leipzig (Teubner), 1903.
[187 a] W. Krull, Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen, *Math. Zeitschr.*, t. XXIII (1925), p. 161-196.
[187 b] W. Krull, Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen, *Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss*, 1926, núm. 1, 32 pp.
[187 c] W. Krull, Zur Theorie der allgemeinen Zahlringe, *Math. Ann.*, t. XCIX (1928), pp. 51-70.
[187 d] W. Krull, Galoische Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen, *Math. Ann.*, t. C (1928), pp. 687-698.
[187 e] W. Krull, Primidealketten in allgemeine Ringbereichen, *Sitzungsber. Heidelberg Akad. Wiss.*, 1928.
[187 f] W. Krull, Allgemeine Bewertungstheorie, *J. de Crelle*, t. CLXVII (1931), pp. 160-196.
[187 g] W. Krull, Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche III, *Math. Zeitschr.*, t. XLII (1937), pp. 745-766.
[187 h] W. Krull, Dimensionstheorie in Stellenringe, *J. de Crelle*, t. CLXXIX (1938), pp. 204-226.
[187 i] W. Krull, *Idealtheorie* (*Erg. der Math.*, Bd. 4), Berlin (Springer), 1935.
[188 a] E. Kummer, Sur les nombres complexes qui sont formés avec les nombres entiers réels et les racines de l'unité, *Journ. de Math.* (1), t. XII (1847), pp. 185-212.
[188 b] E. Kummer, Zur Theorie der complexen Zahlen, *J. de Crelle*, t. XXXV (1847), pp. 319-326.
[188 c] E. Kummer, Ueber die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in Primfactoren, *J. de Crelle*, t. XXXV (1847), pp. 327-367.
[188 d] E. Kummer, Mémoire sur les nombres complexes composés de racines de l'unité et des nombres entiers, *Journ. de Math.* (1), t. XVI (1851), pp. 377-498.
[188 e] E. Kummer, Über die allgemeinen Reciprocitätsgesetze unter den Resten und Nichtresten der Potenzen deren Grand eine Primzahl ist, *Abhandl. der Kön. Akad. der Wiss. zu Berlin* (1859), Math. Abhandl., pp. 19-159.
[189 a] K. Kuratowski, Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques, *Fund. Math.*, t. V (1922), pp. 76-108.
[189 b] K. Kuratowski, *Topologie*, I, 2.ª ed., Warszawa-Vroclaw, 1948.
[190] J. Kürschak, Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, J. *de Crelle*, t. CXLII (1913), pp. 211-253.
[191] J. L. Lagrange, *Œuvres*, 14 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1867-1892.

[192] E. Laguerre, *Œuvres*, 2 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1898-1905.
[193] P. S. Laplace, *Œuvres*, 14 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1878-1912.
[194] E. Lasker, Zur Theorie der Moduln und Ideale, *Math. Ann.*, t. LX (1905), pp. 20-116.
[195 a] M. Lazard, Quelques calculs concernant la formule de Hausdorff, *Bull. Soc. Math. de France*, t. XCI (1963), pp. 435-451.
[195 b] M. Lazard, Groupes analytiques *p*-adiques, *Publ. Math. I. H. E. S.*, núm. 26 (1965), pp. 389-603.
[196 a] H. Lebesgue, Intégrale, longueur, aire, *Ann. di Mat.* (3), t. VII (1902), pp. 231-359.
[196 b] H. Lebesgue, Sur les séries trigonométriques, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, (3), t. XX (1903), pp. 453-485.
[196 c] H. Lebesgue, *Leçons sur l'Intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris (Gauthier-Villars), 1904.
[196 d] H. Lebesgue, Sur le problème de Dirichlet, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. XXIV (1907), pp. 371-402.
[196 e] H. Lebesgue, Sur l'intégration des fonctions discontinues, *Ann. Ec. Norm. Sup.* (3), t. XXVII (1910), pp. 361-450.
[197] L. Le Cam, Convergence in distribution of stochastic processes, *Univ. Calif. Publ. Statistics*, núm. 11 (1957), pp. 207-236.
[198 a] G. W. Leibniz, *Mathematische Schriften*, 7 vol., ed. C. I. Gerhardt, Berlin-Halle (Ascher-Schmidt), 1849-63.
[198 b] G. W. Leibniz, *Philosophische Schriften*, 7 vol., ed. C. I. Gerhardt, Berlin, 1840-90.
[198 c] G. W. Leibniz, *Opuscules et fragments inédits*, ed. L. Couturat, Paris (Alcan), 1903.
[198 d] *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern*, t. I, herausgegeben von C. I. Gerhardt, Berlin (Mayer und Müller), 1899.
[199] B. Levi, Intorno alla teoria degli aggregati, *R. Ist. Lombardo Sci. Lett. Rendic.* (2), t. XXXV (1902), pp. 863-868.
[200] E. E. Levi, Sulla struttura dei Gruppi finiti e continui, *Atti Accad. Sci. Torino*, t. XL (1905), pp. 551-565 (= *Opere*, t. I, pp. 101-115).
[201 a] P. Lévy, *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, Paris (Gauthier-Villars, 1922) 2.ª ed., con el título *Problèmes concrets d'Analyse fonctionnelle*, 1951).
[201 b] P. Lévy, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Paris (Gauthier-Villars), 1948.
[201 c] P. Lévy, Le mouvement brownien, *Mémor. des Sci. Math.*, t. CXXVI (1954), Paris (Gauthier-Villars).
[202] S. Lie, *Gesammelte Abhandlungen*, 7 vol., Leipzig (Teubner).
[203] S. Lie y F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, 3 vol., Leipzig (Teubner), 1888-1893.
[204 a] J. Liouville, Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable, *Journ. de Math.* (1), t. I (1836), pp. 253-265 y t. II (1837), pp. 16-35 y 418-436.

[*204* b] J. LIOUVILLE, D'un théoréme dû à M. Sturm et relatif à une classe de fonctions transcendantes, *Journ. de Math.* (1), t. I (1836), pp. 269-277.

[*204* c] J. LIOUVILLE, Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique ni même réductible à des irrationnelles algébriques, *Journ. de Math.* (1), t. XVI (1851), pp. 133-142.

[*205* a] R. LIPSCHITZ, De explicatione per serias trigonometricas instituenda functionum unius variabilis arbitrariarum, *J. de Crelle*, t. LXIII (1864), pp. 296-308 (trad. francesa de P. Montel. *Acta Math.*, t. XXXVI (1912), pp. 261-295).

[*205* b] R. LIPSCHITZ, *Untersuchungen ueber die Summen von Quadraten*, Bonn, 1886 (resumido en francés en *Bull. Sci. Math.*, t. XXI (1886), páginas 163-183).

[*206*] N. LOBATSCHEVSKY, *Pangeometrie* (*Ostwald's Klassiker*, núm. 130), Leipzig (Engelmann), 1902.

[*207*] L. H. LOOMIS, *An introduction to abstract harmonic analysis*, London-New York-Toronto (van Nostrand), 1953.

[*208*] G. LORIA, Le ricerche inedite di Evangelista Torricelli sopra la curve logaritmica, *Bibl. Math.* (3), t. I (1900), pp. 75-89.

[*209*] N. LUSIN, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris (Gauthier-Villars), 1930.

[*210*] E. LUTZ, Sur l'équation $y^2 = x^3 - Ax - B$ dans les corps *p*-adiques, *J. de Crelle*, t. CLXXVII (1937), pp. 237-247.

[*211*] F. S. MACAULAY, On the resolution of a given modular system into primary systems including some properties of Hilbert numbers, *Math. Ann.*, t. LXXIV (1913), pp. 66-121.

[*212*] A. MACBEATH y S. SWIERCZKOWSKI, Limits of lattices in a compactly generated group, *Can. Journ. of Math.*, t. XII (1960), pp. 427-437.

[*213* a] G. W. MACKEY, On infinite-dimensional spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. LVII (1945), pp. 155-207.

[*213* b] G. W. MACKEY, On convex topological spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. LX (1946), pp. 519-537.

[*214*] C. MACLAURIN, *A treatise of fluxions*, Edinburgh, 2 vol., 1742.

[*215* a] W. MAGNUS, Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einen speziellen Ring, *Math. Ann.*, t. CXI (1935), pp. 259-280.

[*215* b] W. MAGNUS, Über Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren, *J. de Crelle*, t. CLXXVII (1937), pp. 105-115.

[*216*] W. MAGNUS, A. KARRASS y D. SOLITAR, *Combinatorial group theory*, New York (Interscience), 1966.

[*217*] D. MAHNKE, Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis, *Abh. Preuss. Akad. der Wiss. Phys.-Math. Klasse*, 1925, núm. 1, 64 pp., Berlin, 1926.

[*218*] F. MASERES, *Scriptores Logaritmici*, 6 vol., London, 1791-1807.

[*219*] L. MAURER, Über allgemeinere Invarianten-Systeme, *Sitzungsber München*, t. XVIII (1888), pp. 103-150.

[*220*] N. MERCATOR, *Logarithmotechnia... cui nunc accedit vera quadratura hyperbolae...*, Londini, 1668.

[*221* a] H. MINKOWSKI, *Gesammelte Abhandlungen*, 2 vol., Leipzig-Berlin (Teubner), 1911.

[*221* b] H. MINKOWSKI, *Geometrie der Zahlen*, Leipzig (Teubner), 1896.

[*222*] R. A. MINLOS, Generalized random processes and their extension to a measure (en ruso), *Trudy Mosk. Mat. Obschtsch.*, t. VIII (1959), pp. 497-518 (= *Selected transl. in math. statistics and probability*, t. III (19), pp. 291-313, Amer. Math. Soc.).

[*223*] A. F. MÖBIUS, *Gesammelte Werke*, 4 vol., Leipzig (Hirzel), 1885-87.

[*224* a] T. MOLIEN, Ueber Systeme höherer complexer Zahlen, *Math. Ann.*, t. XLI (1893), pp. 83-156.

[*224* b] T. MOLIEN, Über die Invarianten der linearen Substitutionsgruppen, *Berliner Sitzungsber.*, 1897, pp. 1152-1156.

[*225*] G. MONGE, *Géométrie descriptive*, Paris, 1798 (nueva ed., Paris (Gauthier-Villars), 1922).

[*226*] D. MONTGOMERY y L. ZIPPIN, *Topological transformation groups*, New York (Interscience), 1955.

[*227*] E. H. MOORE y H. L. SMITH, A general theory of limits, *Amer. Journ. of Math.*, t. XLIV (1922), pp. 102-121.

[*228*] S. G. MORLEY, *The ancient Maya*, Stanford University Press, 1946.

[*229*] E. NELSON, *Dynamical theories of brownian motion*, Mathematical Notes, Princeton (University Press), 1967.

[*230* a] J. NEPER, *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, Lyon, 1619 (reproducido en [*218*], t. VI, pp. 475-623).

[*230* b] *Napier Tercentenary Memorial Volume*, London, 1915.

[*231*] E. NETTO, Zur Theorie der Elimination, *Acta Math.*, t. VII (1885), pp. 101-104.

[*232*] O. NEUGEBAUER, *Vorlesungen über die Geschichte der antiken Mathematik*, Bd. I: Vorgriechische Mathematik, Berlin (Springer), 1934.

[*233* a] I. NEWTON, *Opuscula*, 3 vol., Lausanne-Genève (M. Bousquet), 1744.

[*233* b] I. NEWTON, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, London, 1687 (nueva ed., Glasgow, 1871).

[*233* c] I. NEWTON, *Mathematical principles of natural philosophy*, trad. al inglés por A. Motte en 1729, Univ. of California, 1946.

[*233* d] *The mathematical papers of Isaac Newton*, vol. I: 1664-1666 (ed. D. Whiteside), Cambridge (Univ. Press), 1967.

[*234*] J. NIELSEN, Die Isomorphismengruppen der freien Gruppen, *Math. Ann.*, t. XCI (1924), pp. 169-209.

[*235*] O. NIKODYM, Sur une généralisation des intégrales de M. Radon, *Fund. Math.*, t. XV (1930), pp. 131-179.

[*236* a] E. NOETHER, Idealtheorie in Ringbereichen, *Math. Ann.*, t. LXXXIII (1921), pp. 24-66.

[*236* b] E. NOETHER, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörper, *Math. Ann.*, t. XCVI (1926), pp. 26-61.

[*236* c] E. NOETHER, Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie, *Math. Zeitschr.*, t. XXX (1929), pp. 641-692.

[*236* d] E. NOETHER, Nichtkommutative Algebra, *Math. Zeitschr.*, t. XXXVII (1933), pp. 514-541.
[*237*] E. NOETHER y R. BRAUER, Über minimale Zerfallungskörper irreduzibler Darstellungen, *Berliner Sitzungsber.*, 1927, pp. 221-228.
[*238*] E. NOETHER y W. SCHMEIDLER, Moduln in nichtkommutativen Bereichen, *Math. Zeitschr.*, t. VIII (1920), pp. 1-35.
[*239*] M. NOETHER, Üner einen Satz aus der Theorie der algebraischen Funktionen, *Math. Ann.*, t. VI (1873), pp. 351-359.
[*240*] W. OSGOOD, Non uniform convergence and the integration of series term by term, *Amer. Journ. of Math.*, t. XIX (1897), pp. 155-190.
[*241*] P. OSMOND, *Isaac Barrow. His life and time*, London, 1944.
[*242*] A. OSTROWSKI, Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x.y)$, *Acta Math.*, t. XLI (1917), pp. 271-284.
[*243*] R. E. A. C. PALEY y N. WIENER, *Fourier transforms in the complex domain*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. núm. 19, New York, 1934.
[*244*] B. PASCAL, *Œuvres*, 14 vol., ed. Brunschvicg, Paris (Hachette), 1904-14.
[*245*] M. PASCH y M. DEHN, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, 2.. Aufl., Berlin (Springer), 1926.
[*246* a] G. PEANO, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, Torino, 1887.
[*246* b] G. PEANO, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Torino, 1888.
[*246* c] G. PEANO, *Arithmeticas principia, novo methodo exposita*, Torino, 1889.
[*246* d] G. PEANO, *I principii di Geometria, logicamente expositi*, Torino, 1889.
[*246* e] G. PEANO, Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires, *Math. Ann.*, t. XXXVII (1890), pp. 182-228.
[*246* f] G. PEANO, *Formulaire de Mathématiques*, 5 vol., Torino, 1895-1905.
[*247*] B. PEIRCE, Linear associative algebra, *Amer. Journ. of Math.*, t. IV (1881), pp. 97-221.
[*248* a] C. S. PEIRCE, Upon the logic of mathematics, *Proc. Amer. Acad. nf Arts and Sci.*, t. VII (1865-68), pp. 402-412.
[*248* b] C. S. PEIRCE, On the algebra of logic, *Amer. Journ. of Math.*, t. III 1880), pp. 49-57.
[*248* c] C. S. PEIRCE, On the relative forms of the algebras, *Amer. Journ. of Math.*, t. IV (1881), pp. 221-225.
[*248* d] C. S. PEIRCE, On the algebras in which division is unambiguous, *Amer. Journ. of Math.*, t. IV (1881), pp. 225-229.
[*248* e] C. S. PEIRCE, On the algebra of logic, *Amer. Journ. of Math.*, t. VII (1884), pp. 190-202.
[*249*] J. PFANZAGL y W. PIERLO, Compact systems of sets, *Lecture Notes in Math.*, núm. 16 (1966), Berlin (Springer).
[*250*] PLATON, *La Rèpublique*, trad. E. Chambry, 2 vol., Paris (Les Belles Lettres), 1932-49.
[*251* a] H. POINCARÉ, *Œuvres*, 11 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1916-1956.
[*251* b] H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, 3 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1893-1899.

[*251* c] H. POINCARÉ, *Science et hypothèse*, Paris (Flammarion), 1902.
[*251* d] H. POINCARÉ, *La valeur de la Science*, Paris (Flammarion), 1905.
[*251* e] H. POINCARÉ, *Science et méthode*, Paris (Flammarion), 1908.
[*252*] J. V. PONCELET, *Traité des propriétés projectives des figures*, 2 vol., 2.ª ed., Paris (Gauthier-Villars), 1865.
[*253*] L. S. PONTRJAGIN, *Topological groups*, Princeton (Univ. Press), 1939.
[*254*] Ju. V. PROKHOROV, Convergence of random processes and limit theorems in probability theory, *Theor. Probab. Appl.*, t. I (1956), pp. 156-214.
[*255*] *Ptolemaei Cl. Opera*, ed. J. L. Heiberg, 2 vol., Lipsiae (Teubner), 1898-1903 (trad. Halma, reimp., 2 vol., Paris (Hermann), 1927).
[*256*] J. RADON, Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunctionen, *Sitzungsber, der math. naturwiss. Klasse der Akad. der Wiss. (Wien)*, t. CXXII, Abt. II a (1913), pp. 1295-1438.
[*257*] G. RICCI y T. LEVI-CIVITA, Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. *Math. Ann.*, t. LIV (1901), pp. 125-201.
[*258*] J. RICHARD, Les principles des Mathématiques et le problème des ensembles, *Rev. Gén. des Sci. pures et appl.*, t. XVI (1905), pp. 541-543.
[*259* a] B. RIEMANN, *Gesammelte mathematische Werke*, 2.ª ed., Leipzig (Teubner), 1892.
[*259* b] B. RIEMANN, *Gesammelte Werke, Nachträge*, Leipzig (Teubner), 1902.
[*259* c] B. RIEMANN, *in* Lettere di E. Betti a P. Tardy, *Rend. Accad. dei Lincei* (5), t. XXIV¹ (1915), pp. 517-519.
[*260* a] F. RIESZ, Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, *C. R. Acad. Sci.*, t. CXLIV (1907), pp. 615-619.
[*260* b] F. RIESZ, Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre, *Atti del IV Congresso Intern. dei Matem.*, Roma, 1908, t. II, pp. 18-24.
[*260* c] F. RIESZ, Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, *Math. Ann.*, t. LXIX (1910), pp. 449-497.
[*260* d] F. RIESZ, Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales, *Ann. Ec. Norm. Sup.* (3), t. XXVIII (1911), pp. 33-62.
[*260* e] F. RIESZ, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Paris (Gauthier-Villars), 1913.
[*260* f] F. RIESZ, Ueber lineare Funktionalgleichungen, *Acta Math.*, t. XLI (1918), pp. 71-98.
[*260* g] F. RIESZ, Zur Theorie des Hilbertschen Raumes, *Acta litt. ac. scient. (Szeged)*, t. VII (1934-35), pp. 34-38.
[*260* h] F. RIESZ, Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires, *Ann. of Math.* (2), t. XLI (1940), pp. 174-206.
[*261*] M. RIESZ, Sur le problème des moments, 3, *Ark. för Math.*, t. XVII (1922-23), núm. 16, 52 pp.
[*262*] S. P. RIGAUD, *Correspondence of scientific men...*, 2 vol., Oxford, 1841-42.
[*263*] G. de ROBERVAL, *Ouvrages de Mathématique* (*Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, t. VI, Paris (1730), pp. 1-478).
[*264*] R. ROBINSON, Plato's consciousness of fallacy, *Mind*, t. LI (1942), pp. 97-114.
[*265*] P. RUFFINI, *Opere Matematiche*, 3 vol., Ed. Cremonese (Roma), 1953-54.

[266] B. RUSSELL y A. N. WHITEHEAD, *Principia Mathematica*, 3 vol., Cambridge, 1910-13.
[267] A. RUSTOW, *Der Lügner*, Diss. Erlangen, 1910.
[268] S. SAKS, *Theory of the integral*, 2.ª ed., New York (Stechert), 1937.
[269] P. ALFONSO ANTONIO DE SARASA, *Solutio problematis...*, Antverpiae, 1649.
[270] P. SAMUEL, La notion de multiplicité en Algèbre et en Géométrie algébrique, *Journ. de Math.* (9), t. XXX (1951), pp. 159-274.
[271] G. SCHEFFERS, Zurückführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen, *Math. Ann.*, t. XXXIX (1891), pp. 293-390.
[272] E. SCHERING, *Gesammelte mathematische Werke*, 2 vol., Berlin (Mayer und Müller), 1902-1909.
[273] L. SCHLÄFLI, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, 3 vol., Basel (Birkhäuser), 1950-56.
[274 a] E. SCHMIDT, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I. Teil: Entwickelung willkürlicher Funktionen nach Systeme vorgeschriebener, *Math. Ann.*, t. LXIII (1907), pp. 433-476.
[274 b] E. SCHMIDT, Ueber die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Rend. Palermo*, t. XXV (1908), pp. 53-77.
[275 a] A. SCHOENFLIES, *Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen*, 2.ª ed., Leipzig-Berlin (Teubner), 1913.
[275 b] A. SCHOENFLIES, Die Krisis in Cantor's mathematischem Schaffen, *Acta Math.*, t. L (1927), pp. 1-23.
[276 a] O. SCHREIER, Abstrakte kontinuierliche Gruppen, *Abh. math. Sem. Univ. Hamburg*, t. IV (1926), pp. 15-32.
[276 b] O. SCHREIER, Die Verwandschaft stetiger Gruppen in grossen, *Abh. math. Sem. Univ. Hamburg*, t. V (1927), pp. 233-244.
[277] E. SCHRÖDER, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, 3 vol., Leipzig (Teubner), 1890.
[278 a] F. SCHUR, Zur Theorie der aus Haupteinheiten gebildeten Komplexen, *Math. Ann.*, t. XXXIII (1889), pp. 49-60.
[278 b] F. SCHUR, Neue Begründung der Theorie der endlichen Transformationsgruppen, *Math. Ann.*, t. XXXV (1890), pp. 161-197.
[278 c] F. SCHUR, Zur Theorie der endlichen Transformationsgruppen, *Math. Ann.*, t. XXXVIII (1891), pp. 273-286.
[278 d] F. SCHUR, Über den analytischen Character der eine endliche continuierliche Transformationsgruppe darstellende Funktionen, *Math. Ann.*, t. XLI (1893), pp. 509-538.
[279 a] I. SCHUR, *Uber eine Klasse von Matrices, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen*, Diss, Berlin, 1901.
[279 b] I. SCHUR, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, *J. de Crelle*, t. CXXVII (1904), pp. 20-50.
[279 c] I. SCHUR, Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere, *Berliner Sitzungsber.*, 1905, pp. 406-432.
[279 d] I. SCHUR, Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen linearer Substitution, *Berliner Sitzungsber.*, 1906, pp. 164-184.

[279 e] I. SCHUR, Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie, *Berliner Sitzungsber.*, 1924, pp. 189-208, 297-321, 346-355.
[280] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions* (*Actual. Scient. et Ind.*, núms. 1091 y 1122), Paris (Hermann), 1950-51.
[281] I. SEGAL, Distributions in Hilbert space and canonical systems of operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. LXXXVIII (1958), pp. 12-41.
[282] E. SELLING, Ueber die idealen Primfactoren der complexen Zahlen, welche aus der Wurzeln einer beliebigen irreductiblen Gleichung rational gebildet sind, *Zeitschr. für Math. und Phys.*, t. X (1865), pp. 17-47.
[283 a] J.-P. SERRE, Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. of Math.*, t. LXI (1955), pp. 197-278.
[283 b] J.-P. SERRE, Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier*, t. VI (1956), pp. 1-42.
[284] J. A. SERRET, *Cours d'Algèbre Supérieure*, 3.ª ed., Paris (Gauthier-Villars), 1866.
[285] C. L. SIEGEL, Symplectic Geometry, *Amer. Journ. of Math.*, t. LXV (1943), pp. 1-86.
[286 a] T. SKOLEM, Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, *Wiss. Vorträge, 5.Kongress Skand. Math.*, Helsingfors, 1922, pp. 217-232.
[286 b] T. SKOLEM, Zur Theorie der associativen Zahlensysteme, *Skr. norske Vid. Akad.*, Oslo, 1927, núm. 12, 50 pp.
[287] H. J. SMITH, *Collected Mathematical Papers*, 2 vol., Oxford, 1894.
[288] SOMMER, *Introduction à la théorie des nombres algébriques* (trad. A. Lévy), Paris (Hermann), 1911.
[289] M. SOUSLIN, Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis, *C. R. Acad. Sci.*, t. CLXIV (1917) pp. 88-91.
[290] E. SPARRE-ANDERSEN y B. JESSEN, On the introduction of measures in infinite product sets, *Dansk. Vid. Selbskab. Mat. Fys. Medd.*, t. XXV (1948), núm. 4, pp. 1-7.
[291] A. SPEISER, *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, 4.ª ed., Basel (Birkhäuser), 1956.
[292] R. STEINBERG, Finite reflection groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. XCI (1959), pp. 493-504.
[293] H. STEINHAUS, Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure, *Fund. Math.*, t. IV (1923), pp. 286-310.
[294 a] E. STEINITZ, Algebraische Theorie der Körpern, *J. de Crelle*, t. CXXXVII (1910), pp. 167-309 (nueva ed., H. Hasse und R. Baer, Berlin-Leipzig (de Gruyter), 1930).
[294 b] E. STEINITZ, Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern, *Math. Ann.*, t. LXXI (1912), pp. 32-354 y LXXII (1912), pp. 297-345.
[295] S. STEVIN, *Les Œuvres mathématiques...*, ed. A. Girard, Leyde (Elzevir), 1634.
[296] E. STIEFEL, Ueber eine Beziehung zwischen geschlossenen Lie'sche Gruppen und diskontinuierlichen Bewegungsgruppen euklidischer

Räume und ihre Anwendung auf die Aufzählung der einfachen Lie'schen Gruppen, *Comm. Math. Helv.*, t. XIV (1941-42) pp. 350-380.

[297] T. STIELTJES, Recherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. de Toulouse*. t. VIII (1894), pp. J.1-J.122.

[298] M. STIFEL, *Arithmetica integra*, Nüremberg, 1544.

[299] J. STIRLING, *Lineae tertii ordinis Newtonianae...*, Londini, 1717 (nueva ed., Paris (Duprat), 1797).

[300] A. H. STONE, Paracompactness and product spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. LIV (1948), pp. 977-982.

[301 a] M. H. STONE, The theory of representation for Boolean algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. XL (1936), pp. 37-111.

[301 b] M. H. STONE, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. XLI (1937), pp. 375-481.

[301 c] M. H. STONE, The generalized Weierstrass approximation theorem, *Math. Magazine*, t. XXI (1948), pp. 167-183 y 237-254.

[302 a] C. STURM, Sur les équations différentielles linéaires du second ordre, *Journ. de Math.* (1), t. I (1836), pp. 106-186.

[302 b] C. STURM, Sur une classe d'équations à différences partielles, *Journ. de Math.* (1), t. I (1836), pp. 373-444.

[303] L. SYLOW, Théorèmes sur les groupes de substitutions, *Math. Ann.*, t. V (1872), pp. 584-594.

[304] J. J. SYLVESTER, *Collected Mathematical Papers*, 4 vol., Cambridge, 1904-1911.

[305] B. TAYLOR, *Methodus Incrementorum directa et inversa*, Londini, 1715.

[306] P. TCHEBYCHEF, Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités, *Acta Math.*, t. XIV (1890), pp. 305-315 (= *Œuvres*, t. II, pp. 481-491).

[307] H. TIETZE, Über Funktionen die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind, *J. de Crelle*, t. CXLV (1915), pp. 9-14.

[308 a] J. TITS, Groupes simples et géométries associées, *Proc. Intern. Congress Math.*, Stockholm, 1962, pp. 197-221.

[308 b] J. TITS, Théorème de Bruhat et sous-groupes paraboliques, *C. R. Acad. Sci.*, t. CCLIV (1962), pp. 2910-2912.

[308 c] J. TITS, Algebraic and abstract simple groups, *Ann. of Math.*, t. LXXX (1964), pp. 313-329.

[309 a] O. TOEPLITZ, Ueber die Auflösung unendlichvieler linearer Gleichungen, mit unendlichvielen Unbekannten, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. XXVIII (1909), pp. 88-96.

[309 b] O. TOEPLITZ, Das Verhältnisvon Mathematik und Ideenlehre bei Plato, *Quellen und Studien zur Geschichte der Math.*, Abt. B: Studien, t. I (1929), pp. 3-33.

[309 c] O. TOEPLITZ, Die mathematische Epinomisstelle, *Quellen und Studien zur Geschichte der Math.*, Abt. B.: Studien, t. II (1933), pp. 334-346.

[310] E. TORRICELLI, *Opere*, 4 vol., ed. G. Loria y G. Vassura, Faenza (Montanari), 1919.

[311] J. TROPFKE, *Geschichte der Elementar-Mathematik*, 7 vol., 2.ª ed., Berlin-Leipzig (de Gruyter), 1921-24.

[312] N. TSCHEBOTARÖW, *Grundzüge der Galois'schen Theorie* (trad. Schwerdtfeger), Groningen (Noordhoff), 1950.

[313] A. TYCHONOFF, Über die topologische Erweiterung von Räumen, *Math. Ann.*, t. CII (1930), pp. 544-561.

[314] P. URYSOHN, Ueber die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, *Math. Ann.*, t. XCIV (1925), pp. 262-295.

[315] A. VANDERMONDE, Mémoire sur la résolution des équations, *Hist. de l'Acad. royale des sciences*, año 1771, Paris (1774), pp. 365-416.

[316] V. S. VARADARAJAN, Measures on topological spaces (en ruso), *Mat. Sbornik*, t. LV (1961), pp. 35-100 (trad. inglesa: *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), vol. 48, pp.161-228.

[317 a] B. L. van der WAERDEN, *Moderne Algebra*, 1.ª ed., 2 vol., Berlin (Springer), 1930-31.

[317 b] B. L. van der WAERDEN, Die Klassification der einfachen Lieschen Gruppen, *Math. Zeitschr.*, t. XXXVII (1933), pp. 446-462.

[317 c] B. L. van der WAERDEN, Zenon und die Grundlagenkrise..., *Math. Ann.*, t. CXVII (1940), pp. 141-161.

[317 d] B. L. van der WAERDEN, Die Arithmetik der Pythagoreer, I, *Math. Ann.*, t. CXX (1947), pp. 127-153.

[318] G. VERONESE, *Fondamenti di geometria*, Padova, 1891.

[319] FRANCISCI VIETAE, *Opera mathematica...*, Lugduni Batavorum (Elzevir). 1646.

[320 a] G. VITALI, Una proprieta delle funzioni misurabili, *R. Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend.* (2), t. XXXVIII (1905), pp. 599-603.

[320 b] G. VITALI, Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali, *Rend. Acc. Sci. di Torino*, t. XLIII (1908), pp. 229-236.

[321] H. VOGT, Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und andere Quellen des 4.Jahrhunderts, *Bibl. Math.* (3), t. X (1909), pp. 97-155.

[322 a] V. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris (Gauthier-Villars), 1913.

[322 b] V. VOLTERRA, *Theory of Functionals*, London-Glasgow (Blackie and Sons), 1930.

[323] K. von FRITZ, The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontium, *Ann. of Math.* (2), t. XLVI (1945), pp. 242-264.

[324 a] J. von NEUMANN, Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, *J. de Crelle*, t. CLIV (1925), pp. 219-240.

[324 b] J. von NEUMANN, Zur Theorie der Darstellung kontinuierlicher Gruppen, *Berliner Sitzungsber.*, 1927, pp. 76-90.

[324 c] J. von NEUMANN, Die Axiomatisierung der Mengenlehre, *Math. Zeitschr.*, t. XXVII (1928), pp. 669-752.

[324 d] J. von NEUMANN, Zur Hilbertschen Beweistheorie, *Math. Zeitschr.*, t. XXVI (1927), pp. 1-46.

[324 e] J. von NEUMANN, Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen, *Compos. Math.*, t. I (1934), pp. 106-114.

[324 f] J. von NEUMANN, The uniqueness of Haar's measure, *Mat. Sbornik.*, t. I (= XLIII) (1936), pp. 721-734.

[324 g] J. von NEUMANN, On rings of operators III, *Ann. of Math.* (2), t. XLI (1940), pp. 94-161.

[325] K. G. V. von STAUDT, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, Nürnberg, 1856.

[326 a] J. WALLIS, *Opera Mathematica*, 3 vol., Oxoniae, 1663-95.

[326 b] J. WALLIS, Logarithmotechnia Nicolai Mercatoris..., *Phil. Trans.*, t. III (1668), pp. 753-759.

[327 a] H. WEBER, Untersuchungen über die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie, *Math. Ann.*, t. XLIII (1893), pp. 521-544.

[327 b] H. WEBER, Leopold Kronecker, *Math. Ann.*, t. XLIII (1893), pp. 1-25.

[327 c] H. WEBER, Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist, *Math. Ann.*, t. XX (1882), pp. 301-329.

[327 d] H. WEBER, Theorie der Abels'chen Zahlkörper, IV, *Acta Math.*, t. IX (1886), pp. 105-130.

[328 a] J. MACLAGAN WEDDERBURN, A theorem on finite algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. VI (1905), pp. 349-352.

[328 b] J. MACLAGAN WEDDERBURN, On hypercomplex numbers, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), t. VI (1908), pp. 77-118.

[328 c] J. MACLAGAN WEDDERBURN, A type of primitive algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. XV (1914), pp. 162-166.

[328 d] J. MACLAGAN WEDDERBURN, On division algebras, *Trans. Amer., Math. Soc.*, t. XXII (1921), pp. 129-135.

[329 a] K. WEIERSTRASS, *Mathematische Werke*, 7 vol., Berlin (Mayer und Müller), 1894-1927.

[329 b] K. WEIERSTRASS, Briefe an P. du Bois-Reymond, *Acta Math.*, t. XXXIX (1923), pp. 199-225.

[330 a] A. WEIL, Sur les fonctions elliptiques p-adiques, *C. R. Acad. Sci.*, t., CCIII (1936), p. 22.

[330 b] A. WEIL, *Sur les espaces uniformes et sur la topologie générale* (*Actual. Scient. et Ind.*, núm. 551), Paris (Hermann), 1937.

[330 c] A. WEIL, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* (*Actual. Scient. et Ind.*, núm. 869), Paris (Hermann), 1940.

[330 d] A. WEIL, *Foundations of algebraic geometry* (*Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, t. 29), New York, 1946.

[330 e] A. WEIL, *Fibre spaces in Algebraic Geometry* (Notes by A. Wallace), Chicago Univ., 1952.

[331 a] H. WEYL, Lettre à I. Schur, *Berliner Sitzungsber.*, 1924, pp. 338-343.

[331 b] H. WEYL, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, *Math. Zeitschr.*, t. XXIII (1925), pp. 271-309, t. XXIV (1926), pp. 328-395 y 789-791.

[331 c] H. WEYL, *Symmetry*, Princeton (Princeton Univ. Press), 1952.

[332] H. WEYL y F. PETER, Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, *Math. Ann.*, t. XCVII (1927), pp. 737-755.

[333] A. N. WHITEHEAD, On cardinal numbers, *Amer. Journ of Math.*, t. XXIV (1902), pp. 367-394.

[334 a] J. H. C. WHITEHEAD, On the decomposition of an infinitesimal group, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. XXXII (1936), pp. 229-237.

[334 b] J. H. C. WHITEHEAD, Certain equations in the algebra of a semi-simple infinitesimal group, *Quart. Journ. of Math.* (2), t. VIII (1937), pp. 220-237.

[335] H. WIELEITNER, Der «Tractatus de latitudinibus formarun» des Oresme, *Bibl. Math.* (3), t. XIII (1912), pp. 115-145.

[336] N. WIENER, Differential space, *J. Math. Phys. M. I. T.*, t. II (1923), pp. 131-174.

[337 a] E. WITT, Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern, *J. de Crelle*, t. CLXXVI (1937), pp. 31-44.

[337 b] E. WITT, Treue Darstellung Lieschen Ringe, *J. de Crelle*, t. CLXXVII (1937), pp. 152-160.

[337 c] E. WITT, Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe, *Abh. math. Sem. Univ. Hamburg*, t. XIV (1941), pp. 289-322.

[338] E. WRIGHT, *Table of Latitudes*, 1599.

[339 a] W. H. YOUNG, On upper and lower integration, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), t. II (1905), pp. 52-66.

[339 b] W. H. YOUNG, A new method in the theory of integration, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), t. IX (1911), pp. 15-50.

[340 a] O. ZARISKI, The compactness of the Riemann manifold of an abstract field of algebraic functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. L (1944), pp. 683-691.

[340 b] O. ZARISKI, Generalized local rings, *Summa Bras. Math.*, t. I (1946), pp. 169-195.

[341] H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie*, Bd. I, Leipzig-Berlin (Teubner), 1937

[342 a] E ZERMELO, Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Math. Ann.*, t. LIX (1904), pp. 514-516.

[342 b] E. ZERMELO, Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung, *Math. Ann.*, t. LXV (1908), pp. 107-128.

[342 c] E. ZERMELO, Untersuchung über die Grundlagen der Mengenlehre, *Math. Ann.*, t. LXV (1908), pp. 261-281.

[343] G. ZOLOTAREFF, Sur la théorie des nombres complexes, *Journ. de Math.* (3), t. VI (1880), pp. 51-84 y 129-166.

[344] M. ZORN, A remark on method in transfinite algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. XLI (1935), pp. 667-670.

[345] A. ZYGMUND, *Trigonometrical series*, 2 vol., Cambridge (Univ. Press), 1959.

Alianza Universidad

Volúmenes publicados

1 H. G. Johnson y otros: **Panoramas contemporáneos de la teoría económica**
2 F. H. Hahn y otros: **Panoramas contemporáneos de la teoría económica**
3 H. A. Simon y otros: **Panoramas contemporáneos de la teoría económica**
4 Enrique Ballestero: **Principios de economía de la empresa**
5, 6 Joachim Matthes: **Introducción a la sociología de la religión**
7 C. U. M. Smith: **Biología molecular: Enfoque estructural**
8 Morton D. Davis: **Teoría del juego**
9, 10 Colin Clark: **Las condiciones del progreso económico**
11 Lewis Mumford: **Técnica y civilización**
12 Erwin Panofsky: **Estudio sobre iconología**
13 Robin Fox: **Sistemas de parentesco y matrimonio**
14 Víctor Sánchez de Zavala: **Hacia una epistemología del lenguaje**
15 E. H. Carr: **Historia de la Rusia Soviética. La Revolución Bolchevique. 1. La conquista y organización del poder**
16 D. J. White: **Teoría de la decisión**
17 Martin J. Bailey: **Renta nacional y nivel de precios**
18 Nicolas Bourbaki: **Elementos de historia de las matemáticas**
19 E. H. Carr: **Historia de la Rusia Soviética. La Revolución Bolchevique. 2. El orden económico**
20 C. U. M. Smith: **El cerebro**
21 James L. Riggs: **Modelos de decisión económica**
22 J. H. Elliott y otros: **Revoluciones y rebeliones de la Europa moderna**
23, 24 Kenneth E. Boulding: **Análisis económico**
25 S. A. Barnett: **La conducta de los animales y del hombre**
26 Renate Mayntz: **Sociología de la organización**
27 Werner Sombart: **El burgués**
28 James S. Duesenberry: **La renta, el ahorro y la teoría del comportamiento de los consumidores**
29 Jagjit Singh: **Ideas fundamentales sobre la teoría de la información, del lenguaje y de la cibernética**
30 Milton Friedman: **Teoría de los precios**
31 Walter Kaufmann: **Hegel**
32 Edward J. Kormondy: **Conceptos de ecología**
33 E. Faure y otros: **Aprender a ser**
34 Michael Akehurst: **Introducción al Derecho internacional**
35 E. H. Carr: **Historia de la Rusia Soviética. La Revolución Bolchevique. 3. La Rusia soviética y el mundo**
36 Milton Friedman: **Una teoría de la función de consumo**
37 Angel Cabo, Marcelo Vigil: **Historia de España Alfaguara I. Condicionamientos geográficos. Edad Antigua**
38, 39 Marx W. Wartofsky: **Introducción a la filosofía de la ciencia**
40 J. A. García de Cortázar: **Historia de España Alfaguara II. La época medieval**
41 L. L. Whyte y otros: **Las estructuras jerárquicas**
42 Antonio Domínguez Ortiz: **Historia de España Alfaguara III. El Antiguo Régimen: Los Reyes Católicos y los Austrias**
43 W. V. Quine: **Filosofía de la lógica**
44 Gonzalo Anes: **Historia de España Alfaguara IV. El Antiguo Régimen: Los Borbones**
45 J. Piaget y otros: **Tendencias de la investigación en las ciencias sociales**
46 Miguel Artola: **Historia de España Alfaguara V. La burguesía revolucionaria**
47 Carl G. Hempel: **Filosofía de la Ciencia Natural**
48 Alec Nove: **Historia económica de la Unión Soviética**
49 Miguel Martínez Cuadrado: **Historia de España Alfaguara VI. La burguesía conservadora**
50 Ludwig Wittgenstein: **Tractatus logico-philosophicus**
51 Ramón Tamames: **Historia de España Alfaguara VII. La República. La Era de Franco**
52 Alexander y Margarete Mitscherlich: **Fundamentos del comportamiento colectivo**
53 Nicolás Sánchez-Albornoz: **La población de América Latina**
54 Yona Friedman: **Hacia una arquitectura científica**
55 Rodney M. Coe: **Sociología de la Medicina**
56 Colin Clark, Margaret Haswell: **Teoría económica de la agricultura de subsistencia**
57 C. M. Cipolla y otros: **La decadencia económica de los imperios**
58 Antonio Hernández Gil y otros: **Estructuralismo y derecho**
59, 60, 61 Steven Runciman: **Historia de las Cruzadas**
62 A. Einstein y otros: **La teoría de la relatividad**
63 Juan Díaz del Moral: **Historia de las agitaciones campesinas andaluzas**
64 Alfredo Deaño: **Introducción a la lógica formal**
65, 66 Karl Dietrich Bracher: **La dictadura alemana**
67 Lucy Mair: **Introducción a la antropología social**
68, 69, 70 A. D. Aleksandrov y otros: **La matemática: su contenido, métodos y significado**
71 N. Chomsky y otros: **La explicación en las ciencias de la conducta**
72 Jagjit Singh: **Ideas y teorías fundamentales de la cosmología moderna**
73 Richard S. Rudner: **Filosofía de la ciencia social**
74 A. Bandura y Richard H. Walters: **Aprendizaje social y desarrollo de la personalidad**
75 E. H. Carr: **Historia de la Rusia Soviética. El interregno (1923-1924)**
76, 77 A. C. Crombie: **Historia de la ciencia: De S. Agustín a Galileo**
78 Manuel García Pelayo: **Burocracia y tecnocracia y otros escritos**
79, 80 B. Rusell, R. Carnap, W. V. Quine y otros: **La concepción analítica de la filosofía**
81 Angel Viñas: **La Alemania nazi y el 18 de julio**
82 John J. Taylor: **La nueva Física**
83 Antonio Truyol y Serra: **La sociedad internacional**
84 N. A. Chomsky y otros: **Semántica y sintaxis**
85 E. H. Carr: **Historia de la Rusia Soviética. El socialismo en un solo país. 1. El escenario. El renacimiento económico.**
86 R. Carnap, O. Morgenstern, N. Wiener y otros: **Matemáticas en las ciencias del comportamiento**
87 Anselmo Lorenzo: **El proletariado militante**
88 Theodore Caplow: **Dos contra uno: teoría de coaliciones en las tríadas**
89 J. Daniel Quesada: **La lingüística generativo-transformacional: supuestos e implicaciones**
90 Gerald A. J. Hodgett: **Historia social y económica de la Europa medieval**
91 Enrique Ballestero: **El Balance: una introducción a las finanzas**
92 J. C. Turner: **Matemática moderna aplicada. Probabilidades, estadística e investigación operativa**
93 Charles M. Allan: **La teoría de la tributación**
94 Richard A. Bilas: **Teoría microeconómica**
95 E. K. Hawkins: **Los principios de la ayuda al desarrollo**
96 Alicia Yllera: **Estilística, poética y semiótica literaria**
97 George Dalton: **Sistemas económicos y sociedad**
98 G. Baddeley, G. G. Schlessinger, A. G. Sharpe y otros: **Química moderna.** Selección de J. C. Stark
99 David Metcalf: **La economía de la agricultura**
Curso de Economía Moderna Penguin/Alianza
100 José Luis Pinillos: **Principios de psicología**
101 William J. Barber: **Historia del pensamiento económico**
102 Patty Jo Watson, Steven A. LeBlanc, Charles L. Redman: **El método científico en arqueología**
103 William P. Alston: **Filosofía del lenguaje**
104 M. Bruce Johnson: **El comportamiento del consumidor. Consumo, renta y riqueza**
Curso de Economía Moderna Penguin/Alianza
105 Niko Tinbergen: **Estudios de etología. 1**
106 Dennis Swann: **La economía del Mercado Común**
Curso de Economía Moderna Penguin/Alianza
107 Francisco Rodríguez Adrados: **La Democracia ateniense**
108 Peter Dorner: **Reforma agraria y desarrollo económico**
Curso de Economía Moderna Penguin/Alianza
109 W. D. Hudson: **La filosofía moral contemporánea**
110 Norman Hampson: **Historia social de la Revolución Francesa.**